

**Takhtajan, Leon A.**

**Etudes of the resolvent.** (English. Russian original) [Zbl 1440.47004](#)

*Russ. Math. Surv.* 75, No. 1, 147-186 (2020); translation from *Usp. Mat. Nauk* 75, No. 1, 155-194 (2020).

This is an excellent review of the role of the resolvent in the theory of operators and its applications. The topics in the review include: Self-adjoint operators; The resolvent and the spectral theorem; The Sturm-Liouville problem; Eigenfunction expansions; Characteristic determinant and trace identities; The one-dimensional Schrödinger operator; Jost solutions and the resolvent; A certain functional-difference operator; Weyl operators; Operators for mirror curves; The Laplace operator on a fundamental domain of a discrete group on the Lobachevsky plane; Pseudo-cusp forms and zeros of L-series; Heegner points and Linnik asymptotics.

Reviewer: [Khristo N. Boyadzhiev \(Ada\)](#)

#### MSC:

- 47A10 Spectrum, resolvent
- 47B25 Linear symmetric and selfadjoint operators (unbounded)
- 34B24 Sturm-Liouville theory
- 35P10 Completeness of eigenfunctions and eigenfunction expansions in context of PDEs
- 47-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to operator theory

#### Keywords:

resolvent of an operator; characteristic determinant of an operator; Hilbert identities; Sturm-Liouville operator; Gelfand-Levitan trace formula; Schrödinger operator; functional-difference operator; Laplace operator on Lobachevsky plane; eigenfunction expansions; Jost solutions; Zakharov-Faddeev trace identities; Eisenstein-Maass series; Dedekind zeta-functions of imaginary quadratic fields; Riemann zeta-function

**Full Text:** [DOI](#) [arXiv](#)

#### References:

- [1] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Mariño, and C. Vafa 2006 Topological strings and integrable hierarchies *Comm. Math. Phys.* 261 2 451-516 · [Zbl 1095.81049](#) · [doi:10.1007/s00220-005-1448-9](#)
- [2] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман 1966 Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве Наука, М. 2-е изд. 543 pp.
- [3] German transl. N. I. Akhiezer and I. M. Glasmann 1968 Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum *Math. Lehrbücher und Monogr. IV Akademie-Verlag, Berlin* xvi+488 pp.
- [4] E. Bombieri 2018 Heilbronn Inst. 2018 Pseudo-Laplacians: a special case, talk at the conference “Perspectives on the Riemann hypothesis” <https://www.bristolmathsresearch.org/meeting/heilbronn-perspectives-on-the-riemann-hypothesis>
- [5] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич 1985 Теория чисел Наука, М. 3-е доп. изд. 504 pp.
- [6] English transl. of 1st ed. Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich 1966 Number theory *Pure Appl. Math.* 20 Academic Press, New York-London x+435 pp.
- [7] В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев 1960 О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма-Лиувилля *Докл. АН СССР* 132 1 13-16
- [8] English transl. V. S. Buslaev and L. D. Faddeev 1960 Formulas for traces for a singular Sturm-Liouville differential operator *Soviet Math. Dokl.* 1 451-454 · [Zbl 0129.06501](#)
- [9] P. Cartier 1982 Comment l’hypothèse de Riemann ne fut pas prouvée (extraits de deux lettres de P. Cartier à A. Weil, datées du 12 août et du 15 septembre 1979) *Seminar on number theory Paris 1980/1981 Progr. Math.* 22 Birkhäuser Boston, Boston, MA 35-48 · [Zbl 0509.10016](#)
- [10] Y. Colin de Verdière 1982 Pseudo-laplaciens. I *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 32 3 275-286 · [Zbl 0489.58034](#) · [doi:10.5802/aif.890](#)
- [11] Y. Colin de Verdière 1983 Pseudo-laplaciens. II *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 33 2 87-113 · [Zbl 0496.58016](#) · [doi:10.5802/aif.917](#)
- [12] M. Deuring 1933 Imaginäre quadratische Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 *Math. Z.* 37 1 405-415 · [Zbl 0007.29602](#) · [doi:10.1007/BF01474583](#)
- [13] Л. А. Дикий 1958 Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля *УМН* 13 3(81) 111-143
- [14] English transl. L. A. Dikiĭ 1961 Trace formulas for Sturm-Liouville differential operators *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.* 2 18

- [15] W. Duke 1988 Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms *Invent. Math.* 92 1 73-90 · Zbl 0628.10029 · doi:10.1007/BF01393993
- [16] Л. Д. Фаддеев 1959 Обратная задача квантовой теории рассеяния *УМН* 14 4(88) 57-119
- [17] English transl. L. D. Faddeyev and B. Seckler 1963 The inverse problem in the quantum theory of scattering *J. Math. Phys.* 4 72-104 · Zbl 0112.45101 · doi:10.1063/1.1703891
- [18] Л. Д. Фаддеев 1964 Свойства  $\backslash(S\backslash)$ -матрицы одномерного уравнения Шредингера Краевые задачи математической физики. 2, Сборник работ. Посвящается памяти Владимира Андреевича Стеклова в связи со столетием со дня его рождения Тр. МИАН СССР 73 Наука, М.-Л. 314-336
- [19] English transl. L. D. Faddeev 1967 Properties of the  $\backslash(S\backslash)$ -matrix of the one-dimensional Schrödinger equation *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* 65 Amer. Math. Soc., Providence, RI 139-166 · Zbl 0181.56704 · doi:10.1090/trans2/065/04
- [20] Л. Д. Фаддеев 1967 Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского Тр. ММО 17 Изд-во Моск. ун-та, М. 323-350
- [21] English transl. L. D. Faddeev 1969 Expansion in eigenfunctions of the Laplace operator on the fundamental domain of a discrete group on the Lobachevskii plane *Trans. Moscow Math. Soc.* 17 357-386
- [22] Л. Д. Фаддеев 1974 Обратная задача квантовой теории рассеяния. II Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. 3 ВИНТИ, М. 93-180
- [23] English transl. L. D. Faddeev 1976 Inverse problem of quantum scattering theory. II *J. Soviet Math.* 5 3 334-396 · Zbl 0373.35014 · doi:10.1007/BF01083780
- [24] L. Faddeev 2000 Modular double of a quantum group *Conférence Moshé Flato 1999* Dijon, 1999 *Math. Phys. Stud.* 21, I Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 149-156 · Zbl 1071.81533
- [25] J. D. Fay 1977 Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group *J. Reine Angew. Math.* 293/294 143-203 · Zbl 0352.30012 · doi:10.1515/crll.1977.293-294.143
- [26] P. Garrett 2018, Heilbronn Inst. 2018 Self-adjoint operators on automorphic forms, talk at the conference "Perspectives on the Riemann Hypothesis" <https://www.bristolmathsresearch.org/meeting/heilbronn-perspectives-on-the-riemann-hypothesis/>
- [27] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий 1975 Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортвега-де Фриза *УМН* 30 5(185) 67-100
- [28] English transl. I. M. Gel'fand and L. A. Dikii 1975 Asymptotic behaviour of the resolvent of Sturm-Liouville equations and the algebra of the Korteweg-de Vries equations *Russian Math. Surveys* 30 5 77-113 · Zbl 0334.58007 · doi:10.1070/RM1975v03n05ABEH001522
- [29] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро 1966 Теория представлений и автоморфные функции Обобщенные функции 6 Наука, М. 512 pp.
- [30] English transl. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, and I. I. Pyatetskii-Shapiro 1969 Representation theory and automorphic functions W. B. Saunders Co., Philadelphia, PA-London-Toronto, ON xvi+426 pp.
- [31] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан 1953 Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка *Докл. АН СССР* 88 4 593-596
- [32] I. M. Gelfand and B. M. Levitan 1953 On a simple identity for the characteristic values of a differential operator of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 88 4 593-596
- [33] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн 1965 Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве Наука, М. 448 pp.
- [34] English transl. I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn 1969 Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators *Transl. Math. Monogr.* 18 Amer. Math. Soc., Providence, RI xv+378 pp. · Zbl 0181.13504 · doi:10.1090/mmono/018
- [35] A. Grassi, Y. Hatsuda, and M. Mariño 2016 Topological strings from quantum mechanics *Ann. Henri Poincaré* 17 11 3177-3235 · Zbl 1365.81094 · doi:10.1007/s00023-016-0479-4
- [36] H. Heilbronn 1934 On the class-number in imaginary quadratic fields *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 5 150-160 · Zbl 60.0155.01 · doi:10.1093/qmath/os-5.1.150
- [37] D. A. Hejhal 1981 Some observations concerning eigenvalues of the Laplacian and Dirichlet  $\backslash(L\backslash)$ -series *Recent progress in analytic number theory* Durham 1979 2 Academic Press, Inc., London-New York 95-110
- [38] D. A. Hejhal 1983 The Selberg trace formula for  $\backslash(\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})\backslash)$  *Lecture Notes in Math.* 1001, , vol. 2 Springer-Verlag, Berlin viii+806 pp. · doi:10.1007/BFb0061302
- [39] H. Iwaniec 1987 Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight *Invent. Math.* 87 2 385-401 · Zbl 0606.10017 · doi:10.1007/BF01389423
- [40] F. Klein 1926 *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* *Grundlehren Math. Wiss.* 24, , vol. I J. Springer, Berlin xiii+385 pp. · Zbl 52.0022.05
- [41] S. Lang (1975  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$ ) Addison-Wesley, Reading, MA-London-Amsterdam xvi+428 pp.
- [42] A. Laptev, L. Schimmer, and L. A. Takhtajan 2016 Weyl type asymptotics and bounds for the eigenvalues of functional-difference operators for mirror curves *Geom. Funct. Anal.* 26 1 288-305 · Zbl 1361.47004 · doi:10.1007/s00039-016-0357-8
- [43] P. D. Lax 2002 *Functional analysis* *Pure Appl. Math. (N. Y.)* Wiley-Interscience, New York xx+580 pp.
- [44] P. D. Lax and R. S. Phillips 1976 *Scattering theory for automorphic functions* *Ann. of Math. Stud.* 87 Princeton Univ. Press, Princeton, NJ x+300 pp. · Zbl 0362.10022 · doi:10.1515/9781400881567

- [45] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян 1970 Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы Наука, М. 671 pp.
- [46] English transl. B. M. Levitan and I. S. Sargsjan 1975 Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators Transl. Math. Monogr. 39 Amer. Math. Soc., Providence, RI xi+525 pp. · [Zbl 0302.47036](#) · [doi:10.1090/mmono/039](#)
- [47] Ю. В. Линник 1979 Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского Избранные труды 1 Наука, Л. 141-200
- [48] Yu. V. Linnik 1979 Asymptotic distribution of reduced binary quadratic forms in relation to the Lobachevsky geometry Selected works 1 Nauka, Leningrad 141-200
- [49] В. А. Марченко 1977 Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения Наукова Думка, Киев 331 pp.
- [50] English transl. V. A. Marchenko 1986 Sturm-Liouville operators and applications Oper. Theory Adv. Appl. 22 Birkhäuser Verlag, Basel xii+367 pp. · [doi:10.1007/978-3-0348-5485-6](#)
- [51] L. J. Mordell 1934 On the Riemann hypothesis and imaginary quadratic fields with a given class number J. London Math. Soc.9 4 289-298 · [Zbl 60.0156.04](#) · [doi:10.1112/jlms/s1-9.4.289](#)
- [52] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский 2006 Следы операторов УМН61 5(371) 89-156 · [doi:10.4213/rm4833](#)
- [53] English transl. V. A. Sadovnichii and V. E. Podolskii 2006 Traces of operators Russian Math. Surveys61 5 885-953 · [Zbl 1157.47013](#) · [doi:10.1070/RM2006v061n05ABEH004357](#)
- [54] A. Selberg 1956 Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series J. Indian Math. Soc. (N. S.)20 47-87 · [Zbl 0072.08201](#)
- [55] А. С. Шварц 1981 Эллиптические операторы в квантовой теории поля Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. 17 ВИНТИ, М. 113-173
- [56] English transl. A. S. Shvarts 1983 Elliptic operators in quantum field theory J. Soviet Math.21 4 551-601 · [Zbl 0509.35071](#) · [doi:10.1007/BF01084286](#)
- [57] C. Siegel 1935 Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper Acta Arith.1 83-86 · [Zbl 61.0170.02](#) · [doi:10.4064/aa-1-1-83-86](#)
- [58] Л. А. Тахтаджян 2011 Квантовая механика для математиков НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика, М.-Ижевск 496 pp.
- [59] English transl. L. A. Takhtajan 2008 Quantum mechanics for mathematicians Grad. Stud. Math. 95 Amer. Math. Soc., Providence, RI xvi+387 pp. · [Zbl 1156.81004](#) · [doi:10.1090/gsm/095](#)
- [60] Л. А. Тахтаджян, А. Ю. Алексеев, И. Я. Арефьева, М. А. Семенов-Тян-Шанский, Е. К. Склянин, Ф. А. Смирнов, С. Л. Шаташвили 2017 Научное наследие Л. Д. Фаддеева. Обзор работ УМН72 6(438) 3-112 · [doi:10.4213/rm9799](#)
- [61] English transl. L. A. Takhtajan, A. Yu. Alekseev, I. Ya. Aref'eva, M. A. Semenov-Tian-Shansky, E. K. Sklyanin, F. A. Smirnov, and S. L. Shatashvili 2017 Scientific heritage of L. D. Faddeev. Survey of papers Russian Math. Surveys72 6 977-1081 · [Zbl 1396.81008](#) · [doi:10.1070/RM9799](#)
- [62] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев 2015 Спектральная теория одного функционально-разностного оператора конформной теории поля Изв. РАН. Сер. матем.79 2 181-204 · [doi:10.4213/im8256](#)
- [63] English transl. L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev 2015 The spectral theory of a functional-difference operator in conformal field theory Izv. Math.79 2 388-410 · [Zbl 1327.39013](#) · [doi:10.1070/IM2015v079n02ABEH002747](#)
- [64] А. Б. Венков 1981 Спектральная теория автоморфных функций Тр. МИАН СССР153 3-171
- [65] English transl. A. B. Venkov 1982 Spectral theory of automorphic functions Proc. Steklov Inst. Math.153 1-163 · [Zbl 0501.10029](#)
- [66] А. Б. Венков, В. Л. Калинин, Л. Д. Фаддеев 1973 Неарифметический вывод формулы следа Сельберга Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика Зап. науч. сем. ЛОМИ 37 Изд-во "Наука", Ленинград, отд., Л. 5-42
- [67] English transl. A. B. Venkov, V. L. Kalinin, and L. D. Faddeev 1977 A nonarithmetic derivation of the Selberg trace formula J. Soviet Math.8 171-199 · [Zbl 0388.35035](#) · [doi:10.1007/BF01084954](#)
- [68] И. М. Виноградов 1917 О среднем значении числа классов чисто коренных форм отрицательного определителя Сообщ. Харьк. матем. о-ва16 10-38
- [69] I. M. Vinogradov 1952 On the mean value of the number of classes of reduced forms of negative determinant Soobshch. Kharkov. Mat. Obsch.Избранные труды 16 Изд-во АН СССР, М. 29-53
- [70] I. M. Vinogradov 1952 Selected works Publishing house of the USSR Academy of Sciences, Moscow 29-53
- [71] А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян 1980 Об асимптотиках Линника-Скубенко Докл. АН СССР253 4 777-780
- [72] English transl. A. I. Vinogradov and L. A. Takhtadzhyan 1980 On the Linnik-Skubenko asymptotics Soviet Math. Dokl.22 1 136-140 · [Zbl 0488.10017](#)
- [73] А. И. Виноградов, Л. А. Тахтаджян 1981 Аналоги формулы Виноградова-Гаусса в критической полосе Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию Тр. МИАН СССР 158 45-68
- [74] English transl. A. I. Vinogradov and L. A. Takhtadzhyan 1983 Analogues of the Vinogradov-Gauss formula in the critical strip Proc. Steklov Inst. Math.158 47-71 · [Zbl 0523.12011](#)
- [75] D. Zagier 1981 Eisenstein series and the Riemann zeta-function Automorphic forms, representation theory and arithmetic Bombay 1979 Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math. 10 Tata Inst. Fund. Res., Bombay 275-301 · [doi:10.1007/978-3-662-00734-1\\_10](#)
- [76] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев 1971 Уравнение Кортевега-де Фриса - вполне интегрируемая гамильтонова система Функц. анализ и его прил.5 4 18-27

- [77] English transl. V. E. Zakharov and L. D. Faddeev 1971 Korteweg-de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system *Funct. Anal. Appl.*5 4 280-287 · [Zbl 0257.35074](#) · [doi:10.1007/BF01086739](#)

This reference list is based on information provided by the publisher or from digital mathematics libraries. Its items are heuristically matched to zbMATH identifiers and may contain data conversion errors. It attempts to reflect the references listed in the original paper as accurately as possible without claiming the completeness or perfect precision of the matching.