Trèves, François

Basic linear partial differential equations. (English) Zbl 0305.35001

Pure and Applied Mathematics, 62. New York-San Francisco London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XVII, 470 p. $ 29.50; £14.15 (1975).

L'étude des équations aux dérivées partielles a fait de grands progrès dans les derniers vingt ans. Ceci est dû aux nouvelles techniques (distributions, espaces vectoriels topologiques, semi-groupes d'opérateurs, etc.) lesquelles permettent de formuler (et de démontrer) des théorèmes généraux. Cela cache cependant assez souvent au débutant dans ce domaine les liens avec les résultats et les méthodes classiques; or il se trouve que très souvent un retour aux sources (avec l'acquis technique "moderne") est souvent à la base des résultats nouveaux. L'A. a entrepris le projet, ambitieux et périlleux, de compler le "no man's land" entre "classique" et "moderne".

Plus précisément, le livre dont il s'agit a pour but de retrouver la plupart des résultats fondamentaux concernant l'équation de Laplace, de celle des ondes et de la chaleur ainsi que les problèmes traditionnels (problème de Dirichlet, problème de Cauchy, certains problèmes mixtes), mais avec des méthodes contemporaines. Ceci permet;

(1) De faire accessible à l'analyste moderne, dans un language qu'il comprend, les faits classiques fondamentaux;

(2) D'une introduction aux théories modernes, très accessibles car sans trop de difficultés techniques.

Il est évident qu'une telle tâche est difficile et que certains choix prêteront toujours à discussion. Mais l'A. est un de ceux qui ont le plus contribué par leurs travaux aux progrès récents. Il se trouve donc placé en excellente position pour entreprendre ce travail. D'autre part, le style même de l'A. (en contraste avec la sécheresse usuelle de beaucoup de textes mathématiques contemporains) est particulièrement bien adapté au but assigné.

Ce livre est divisé en 4 chapitres, le premier, "The basic examples of PDE's and their fundamental solutions" comprend les exemples typiques: équation de Laplace, des ondes, de la chaleur, de Cauchy-Riemann, de Schrödinger; de gradient, la divergence), ensuite on introduit la notion de solution fondamentale, la notion d'hypoellipticité et on indique le rôle des solutions fondamentales dans l'étude de l'analyticité des solutions. On passe ensuite au calcul de solutions fondamentales, d'abord: pour les équations différentielles ordinaires, ensuite pour les autres équations mentionnées ci-dessus. On profite de ces calculs pour analyser les supports et le support singulier de la solution fondamentale de l'équation des ondes. Enfin la dernière section du chapitre, contient la formule de Green, la formule de Poisson, les inégalités de Harnack, etc. Le premier chapitre, de quelques 85 pages est très accessible et agréable à lire.

Le second chapitre est dédié au problème de Cauchy. On commence par le problème de Cauchy (P.C.) pour les équations différentielles ordinaires, ensuite il y a une section de remarques préliminaires (très utiles) et on passe au P.C. pour l'equation des ondes. A cette occasion on introduit les espaces H^0, on étudie aussi les domaines d'influence, la propagation des singularités, la conservation de l'énergie (pour les solutions du P.C. pour l'équation des ondes). Les deux sections suivantes sont dédiées aux systèmes hyperboliques.

La seconde partie du chapitre (les sections 17–21) concernent le théorème de Cauchy-Kowalevska et le théorème de Holmgren. On y donne les versions abstraites et celles classiques de ces deux théorèmes (l'A. utilise le théorème Ovciannikov). A cette occasion on introduit la notion de surface caractéristique, et, dans un appendice, la notion de bicaractéristique et l'intégration de l'équaton caractéristique. Toute cette partie est très intéressante et la présentation est très unitaire grâce aux méthodes choisies.

Au troisième chapitre on étudie les problèmes aux limites, au long de presque 200 pages. On commence avec le problème de Dirichlet pour l'équation metaharmonique $(-\lambda+\Delta)u=f$, $\lambda>0$. A cette occasion on introduit l'espace $H^1(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$), et son sous-espace $H^1_0(\Omega)$. On remarque que tout ce qui a été dit pour $-\lambda + \Delta$ peut être étendu aux opérateurs elliptiques

$$L = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^k} \left(a^{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x)$$

à coefficients bornés. Avant d'aller plus loin, trois sections consacrées aux espaces de Sobolev (entre autres, le problème des traces, les inégalités de Sobolev, etc.). Enfin on démontre la régularité à la frontière pour la solution du problème de Dirichlet (pour $-\lambda + \Delta$). On passe des résultats variationnels aux resultats classiques en utilisant un principe faible de maximum. Ce sont deux sections très intéressantes et qui ne se trouvent pas, à ma connaissance, dans les textes standard. Les sections suivantes exposent la théorie de l'équation de Laplace (fonctions surharmoniques potentiels, théorème de Riesz, capacité, relations avec le mouvement brownien, problème de Dirichlet dans le plan et représentation conforme, harmonique sphérique et approximation de fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^3$.

On revient ensuite aux opérateurs elliptiques généraux du second ordre, dont on étudie certaines propriétés spectrales élémentaires, et on considère deux exemples simples. On trouve ensuité une section consacrée aux méthodes d'approximation des solutions du problème de Dirichlet, en particulier à la méthode des différences finies. L'A. passe aux équations elliptiques d'ordre supérieur, et démontre l'inégalité de Gårding, avec les applications usuelles. Le chapitre s'achève avec une section consacrée à l'étude du problème de Neumann pour $-\Delta + \lambda$, $\lambda > 0$ (formulation variationelle), ainsi que pour les équations elliptiques générales, ainsi que d'autres problèmes pour $-\lambda + \Delta$ (problèmes pour $-\lambda + \Delta$ (problème de la dérivée oblique, problème de radiation etc.) et avec une section "informative" sur les conditions générales de Lopatinskiĭ.

Le dernier chapitre est consacré aux problèmes mixtes et aux équations d'évolution. Après une section où l'on expose ce dont on a besoin concernant les fonctions et les distributions à valeurs dans des espaces de Banach on passe à l'étude des problèmes mixtes (forme faible). On y démontre l'utilité des inégalités d'énergie et la régularité de la solution faible ainsi obtenue par rapport au temps.

L'A. introduit ensuite la transformation de Laplace et l'applique à la resolution des problèmes mixtes paraboliques (on y traite deux exemples: la solution fondamentale de l'équation de chaleur ($\Omega = \mathbb{R}^n$) et de distribution de la chaleur dans une barre). Une section donne des éléments de la théorie des semigroupes d'operateurs (culminant avec le théorème de Hille-Yosida) et son application aux problèmes paraboliques mixtes. On trouve ensuite une section sur l'application du développement suivant les fonctions propres aux problèmes mixtes paraboliques et hyperboliques et on fini par une section où l'on donne un théorème abstrait d'existence et d'unicité pour des problèmes mixtes hyperboliques.

Comme on l'a vu, le livre est divisé en 4 chapitres, et chaque chapitre en sections, une section correspondant "Grosso modo" à un cours. Chaque section est suivie d'un certain nombre d'exercices, certains faciles, d'autres constituant des compléments de la théorie mais tous contribuant beaucoup à aider l'étudiant à mieux comprende le texte et à manier les techniques enseignées.

La difficulté est l'homogénéité des chapitres n'est pas la même. Une partie très réussie est celle concernant les relations entre les solutions classiques et la théorie L^2 pour le problème de Dirichlet, point systématiquement négligé à ma connaissance dans les cours standards. Une autre partie très homogène est celle consacrée au théorème de Cauchy-Kowalevska et au théorème de Holmgren, ce qui n'a rien de surprenant vu les travaux de l'A. dans ce domaine. Le chapitre IV est moins homogène, mais évidemment ceci est dû en partie à la nature même des problèmes traités, et à une limitation inévitable des dimensions du livre.

Le caractère très "explicatif" de l'exposé (démandant – ce qui est normal – une bonne connaissance des distributions et des éléments d'analyse fonctionnelle) ainsi que le choix des questions traitées – qui offrent une version valable (mais ce n'est pas la seule!) laquelle sera surement apprécié par tous ceux désirant étudier les équations aux dérivées partielles.

Le livre comble ainsi brillamment un domaine découvert de la litérature mathématique.

Reviewer: G. Gussi

For a scan of this review see the web version.

MSC:

35-01 Introductory exposition (textbooks, tutorial papers, etc.) pertaining to partial differential equations
35-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to partial differential equations
35J05 Laplace operator, Helmholtz equation (reduced wave equation), Poisson equation
35K05 Heat equation
35L05 Wave equation
35J30 Higher-order elliptic equations
35K25 Higher-order parabolic equations
35L55 Higher-order hyperbolic systems