Hasse, Helmut; **Schmidt, F. K.**
Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten. (German) Zbl 0017.10101
J. Reine Angew. Math. 177, 215-237 (1937).

$K = k(x,y)$ sei ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten x über dem Konstantenkörper k, $f(x,y)=0$. $\mathrm{K} = k(\xi,\eta)$, $f(\xi,\eta)=0$ sei zu K über k isomorph und $\mathfrak{K} = \mathrm{K}K/K$ durch Erweiterung von k zu K aus K entstanden. Es gibt genau einen Primdivisor (ersten Grades) $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}/K$ mit $\eta \equiv y \bmod \mathfrak{P}$ für alle Paare η, y einander entsprechender Elemente von K und K; für separierendes x ist $\xi - x$ genau durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar.

x sei separierend. Für ein beliebiges y aus K werden die höheren Ableitungen $\frac{d^k y}{dx^k}$ (genauer die Analoga von $\frac{1}{k!}\frac{d^k y}{dx^k}$ folgendermaßen erklärt: Dem y entspreche in K das Element η, und dessen $\mathfrak{P}$-adische Entwicklung mit Koeffizienten aus K sei $\eta = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\xi - x)^k$. Dann ist $\frac{d^k y}{dx^k} = y_k$. Aus dieser Definition ergeben sich sofort die Summenregel, die Produktregel, die Regel $\frac{d_k(\text{konst.}\, y)}{dx^k} = \text{konst.}\frac{d^k y}{dx^k}$ und daraus die sonst als Definition gebrauchte Formel

$$\frac{dy}{dx} = -f_x(x,y)/f_y(x,y),$$

ferner die Kettenregel.

Um den Zusammenhang mit der lokalen Differentiationstheorie [*H. Hasse*, J. Reine Angew. Math. 176, 174–183 (1936; Zbl 0016.05204), *H. Hasse*, ibid. 175, 50–54 (1936; Zbl 0013.34103)] herzustellen wird gezeigt:

Hat der Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K/k einen über k separablen Restklassenkörper $k_\mathfrak{p}$, und ist p ein Primelement zu $\mathfrak{p}$, so liefert die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung $y = \sum_{\mu_0}^{\infty} a_\mu p^\mu$, a_μ aus $k_\mathfrak{p}$ von y aus K durch gliedweises Differenzieren die $\mathfrak{p}$-adische Entwicklung

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{\mu_0}^{\infty} \binom{p}{k} a_p p^{p-k}.$$

$\mathfrak{M}$ sei ein k-Modul endlichen Ranges n in K, x ein separierendes Element von K. Ist $y_0, \dots, y_{n-1}$ eine Basis von $\mathfrak{M}/k$, so hängt der Hauptdivisor $\mathfrak{d}_x(\mathfrak{M}) \approx \left|\frac{d^k y}{dx^k}\right|$, $i,k = 0,1,\dots,n-1$, nicht von der Basiswahl ab und es gilt für ein anderes separierendes Element t die Umrechnungformel

$$\mathfrak{d}_t(\mathfrak{M}) \approx \mathfrak{d}_x(\mathfrak{M}) \left(\frac{dx}{dt}\right)^{1+2\dots+(n-1)},$$

so daß der Divisor $\mathfrak{d}(\mathfrak{M}) \approx \mathfrak{d}_x(\mathfrak{M})(dx)^{1+2\dots+(n-1)}$, von x unabhängig allein durch $\mathfrak{M}$ bestimmt ist.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ersten Grades von K/k und $y_i = p^{\rho_i} + \dots$ ($\mathfrak{p}$-adisch), $\rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_{n-1}$, eine für $\mathfrak{p}$ normierte Basis von $\mathfrak{M}/k$, so ist

$$\left|\frac{d^k y_i}{dx^k}\right| = \left|\binom{\rho_i}{k}\right| p^{\sum \rho_i - \sum k} + \dots,$$

so daß $\mathfrak{d}(\mathfrak{M})$ genau durch die Potenz $\mathfrak{p}^{\sum_{i=0}^{n-1}(\rho_i - i)}$ von $\mathfrak{p}$ teilbar ist, wenn die Charakteristik von k in der Determinante $\left|\binom{\rho_i}{k}\right|$ nicht aufgeht.

In einem Nachtrag gibt F. K. Schmidt eine allgemeine Differentiationstheorie. I sei ein Integritätsbereich. Ist jedem $y \in I$ eine Folge $y^{(0)} = y, y', y'', \dots$ von Elementen eines Erweiterungsintegritätsbereiches I^* zugeordnet mit $(y+z)^{(\nu)} = y^{(\nu)} + z^{(\nu)}$ und $(yz)^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{\nu} y^{(\nu-\mu)} z^{(\nu)}$, so heißt diese Zuordnung eine Differentiation von I. $c \in I$ heißt absolute Differentiationskonstante, wenn $c' = c'' = \dots = 0$

ist. Ist $c' = c'' = \ldots = c^{(\rho-1)} = 0$, aber $c^{(\rho)} \neq 0$, so heißt c eine Differentiationskonstante ρ-ter Ordnung. Ist $I^* = I$ und gilt $\binom{\nu}{\mu} y^{(\nu)} = (y^{(\mu)})^{(\nu-\mu)}$, so heißt die Differentiation iterativ. Als Ordnungen von Differentiationskonstanten können in diesem Falle nur Potenzen der Charakteristik p auftreten. Falls nicht alle Ableitungen $y^{(\nu)}$ aller y gleich 0 sind, so kann durch eine Umbenennung erreicht werden, daß es ein y mit $y' \neq 0$ gibt, was immer vorausgesetzt sei. $T^* = I^*\{u\}$ sei der Integritätsbereich aller Potenzreihen der Unbestimmten u über I^*. $y \leftrightarrow Y = y + y'u + y''u^2 + \ldots$ ist eine Isomorphie zwischen I und einem $T \subseteq T^*$. Umgekehrt liefert jede solche Isomorphie eine Diff.; die Theorie der Diff. ist also mit der Theorie solcher Isomorphien gleichwertig. Die Taylorentwicklungen $Y = y + y'u + y''u^2 + \ldots$ gestatten die Diff. $D_\mu Y = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \binom{\nu}{\mu} y^{(\mu)} u^{(\nu-\mu)}$. Genau dann ist die gegebene Diff. iterativ, wenn ihre isomorphe Übertragung $Y \to Y, Y', Y'', \ldots$ auf T, mit dieser Diff. übereinstimmt. Von einer Diff. $y \to y, y', y'', \ldots$ wird gesagt, sie gehe aus der Diff. $y \to y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots$ mittels x nach der Kettenregel hervor, wenn die Taylorreihe $y + y'u + y''u^2 + \ldots$ aus der Taylorreihe $y + \dot{y}v + \ddot{y}v^2 + \ldots$ durch Einsetzen von $v = x'u + x''u^2 + \ldots$ hervorgeht. Wenn $x' \neq 0$ ist, so hat I genau eine Diff. $y \to y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots$, aus der die Diff. $y \to y, y', y”, \ldots$ mittels x nach der Kettenregel hervorgeht, und es ist $\dot{x} = 1$, $=$ x$^{(3)} = \ldots =$ 0.*EineDiff.von*I*kannaufgenaueineWeiseaufdenQuotientenkrper*K*von*I*undaufeineseparablealgebraischeErweiterun*

Es sei jetzt I $=$ K*einseparabelerzeugbareralgebraischerFunktionenkrpereinerUnbestimmtenberdemKonstantenkrper*k *kabsoluteDiff.*$-$*Konstantensind, werdenangegeben.Ist*x*separierend, sogibtesgenaueinemit*D$_x$*zubezeichnendeDiff.m* 1,D$_x^\nu x = 0$,$\nu > 1$.*DerbergangzurlokalenDiff.erfolgtohnejedeRechnungso* :K*seiisomorphdemTeilkrper*$\overline{K}$*desPotenzre* $=\sum_{\mu=0}^{n} c_\mu x^\mu$.*Fry*$\in K$,$=\sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} c_\mu x^\mu$*giltdann*$\overline{D_x^\nu y} = \sum_{\mu=\mu_0}^{\infty} \binom{\mu}{\nu} c_\mu x^{\mu-\nu}$.*DieiterativenDiff.lassensichjetztbersehen* : *Istp*=0, *sogibteszunichtkonstantem*x*undbeliebigem*z*genaueineiterativeDiff.von*K/k*mit*x' $=$ z, *unddassindalleDiff.vo* 0, *sogibteszujederiterativenDiff.einseparierendesElementt*mitD$_t^\nu y = y^{(\nu)}$,$\nu = 1, 2, \ldots,$ *mfralleyundgegebenes*m, *soda*

Reviewer: M. Deuring (Jena)

For a scan of this review see the web version.

MSC:

11R58	Arithmetic theory of algebraic function fields	Cited in **2** Reviews
12H05	Differential algebra	Cited in **51** Documents
14H05	Algebraic functions and function fields in algebraic geometry	

Keywords:

algebraic function fields; higher differential quotients

Full Text: Crelle EuDML