Clebsch, Alfred; Gordan, Paul

On the typical representation of the binary form. (Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie.) (Italian) JFM 01.0058.01

Brioschi Ann. (2) I, 23-79 (1867).

Der Zweck der Arbeit ist der, die binäre Form fünften Grades

$$u = ax_1^5 + 5bx_1^4x_2 + 10cx_1^3x_2^2 + 10dx_1^2x_2^3 + 5ex_1x_2^4 + fx_2^5$$

in typischer Form darzustellen, d. h. so, dass die Coefficienten der neuen Form Invarianten werden, wenn man zwei lineare Covarianten als Veränderliche einführt. Bildet man die Invarianten i und j der Form vierten Grades $\frac{1}{5}\left(x_1\frac{\partial u(y)}{\partial y_1} + x_2\frac{\partial u(y)}{\partial y_2}\right)$, so sind

$$\begin{aligned} A &= i_{11}i_{22} - i_{12}^2, \\ B &= \frac{1}{2}(i_{11}\tau_{22} - 2i_{12}\tau_{12} + i_{22}\tau_{11}), \\ C &= \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 \end{aligned}$$

die drei Invarianten von u, deren Ordnung bezüglich 4, 8, 12 ist. Dabei ist $\tau = 2(j_{11}j_{22} - j_{12}^2)$. Ferner sei $\vartheta = i_1\tau_2 - \tau_1 i_2$, so findet man

$$\vartheta_{11}\vartheta_{22} - \vartheta_{12}^2 = AC - B^2, \;\; \vartheta^2 = -\{A\tau^2 - 2B\tau i + Ci^2\}.$$

Weiter führen wir die lineare Covariante

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{1}{2}(i_{11}j_{22} - 2i_{12}j_{12} + i_{22}j_{22})$$

ein, ebenso

$$\begin{aligned} 2M &= i_{11}\alpha_2^2 - 2i_{12}\alpha_1\alpha_2 + i_{22}\alpha_1^2, \\ 2N &= \tau_{11}\alpha_2^2 - 2\tau_{12}\alpha_1\alpha_2 + \tau_{22}\alpha_1^2, \\ 2R &= \vartheta_{11}\alpha_1^2 - 2\vartheta_{12}\alpha_1\alpha_2 + \vartheta_{22}\alpha_2^2, \end{aligned}$$

dann erhält man die Relationen

$$R^2 = -(AN^2 - 2BMN + CM^2), \;\; N = \frac{1}{4}(AC - B^2), \;\; M = AB - 3C,$$

und wenn $\gamma = \frac{1}{2}(\vartheta_1\alpha_2 - \alpha_1\vartheta_2)$ ist:

$$R = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \; S = AN - BM, \; T = CM - BN, \; MT + NS = -R^2.$$

α und γ können auch als die rationalen Factoren von $M\tau - Ni$ definirt werden. Für u erhält man schliesslich die typische Form

$$R^4.u = \left(B - \frac{A^2}{3}\right)\gamma^5 - 5\left(N - \frac{AM}{3}\right)\gamma^4\alpha$$

$$-10\frac{M^2}{3}\gamma^3\alpha^2 - 10\left(N^2 - \frac{BM^2}{3}\right)\gamma^2\alpha^3$$

$$+5\left(NT - \frac{MN - BS}{3}M\right)\gamma\alpha^4 - \left(N^3 + T^2 + \frac{NMS - BM^2N - BS^2}{3}\right)\alpha^5.$$

Es werden hierauf die Specialfälle $R = 0$; $R = 0, \; M = 0$; $\alpha = 0$ behandelt. Für die Form sechsten Grades wird eine ähnliche Transformation vorgenommen; die betroffenden Formeln aber hier aufzustellen, würde zu weit führen.

Reviewer: Netto, Dr. (Berlin)

MSC:

11E76 Forms of degree higher than two
15A72 Vector and tensor algebra, theory of invariants

Keywords:

binary forms of degree five or six; invariants and covariants of binary forms

Full Text: DOI