Clebsch, A.

On the mapping of algebraic surfaces, in particular of 4th and 5th order. (Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung.) (German)

JFM 02.0633.02
Clebsch Ann. I, 253 (1869).

Die vorliegende Abhandlung enthlt eine allgemeine Exposition der eindeutigen Abbildung algebraischer Flächen auf eine Ebene. Bei der hervorrangeden Wichtigkeit, welche diese Art von Betrachtungen in der neueren Geometrie gewonnen hat, mag eine kurze Auseinandersetzung des früher in dieser Richtung Geleisteten hier Platz finden. Eindeutige Verwandtschaften, welche über die Collineation hinausgehen, sind zunächst zwischen zwei Ebenen untersucht worden: die Betrachung der einfachsten, der sogenannten quadratischen, geht bis auf Poncelet, Plücker, Magnus und Steiner zurück. Die allgemeinsten derartigen Verwandtschaften betrachtete Cremona in zwei wichtigen Abhandlungen, die 1863 und 1865 in den Abhandlungen der Academie zu Bologna erschienen, und darf der Gegenstand seitdem als eine der analytischen Geometrie der Ebene angeschlossene selbstständige Disciplin betrachtet werden. Von mahrerer Flächen hat man seit langer Zeit, ob auch ohne Bewusstsein des allgemeinen Princips, die Flächen zweiten Grades auf die Ebene eindeutig bezogen, oder, wie man sagt, abgebildet. Denn das Verafhren der stereographischen Projection einer Kugel auf eine Ebene ist nichts Anderes als eine solche Abbildung. Diese Abbildung ist bekanntlich zugleich eine conforme, was im Allgemeinen bei diesen Abbildungen nicht der Fall ist, indem vielmehr der ganze Nachdruck einzig auf den eindeutigen algebraischen Zusammenhang zwischen Fläche und Ebene zu legen ist. - Andererseits hatte, was wieder auf eine eindeutige Abbildung der Fläche auf die Ebene zurückkommt, Plücker 1847 im Crelle'schen Journale Bd. 34 den Gedanken entwickelt, den Punkt auf dem einschaligen Hyperboloide ähnlich wie den Punkt in der Ebene durch 2 Coordinaten eindeutig zu bestimmen, namentlich durch die beiden Strecken, welche von ihm aus gerechnet auf den beiden durch ihn gehenden Erzeugenden durch zwei feste Erzeugende der Fläche abgeschnitten werden. Aber die eigentliche Theorie der Flächenabbildung begann erst, als Chasles 1863 in den Comptes Rendus die Geometrie auf einer Fläche zweiter Ordnung vermöge einer eindeutigen Beziehung derselben auf die Ebene ausführlich behandelte. Den Gedanken, die Geometrie auch auf höheren Flächen mit der Geometrie der Ebene in Zusammenhang zu bringen, fassten gleichzeititg Clebsch und Cremona, indem die unabhängig von einander im Anschluss angehörig die Grassmann'sche Erzeugungsweise die Flächen dritter Ordnung in diesem Sinne behandelten. Die bez. Arbeit von Clebsch ist im 65^{ten} Bde. Von Borchardt's Journal mitgetheilt; Cremona's Abhandlung fand erst später Veröjjentlichung (Borchardt's Journal Bd. 68) als Bestandtheil der bei der Berliner Academie eingerichten Preisarbeit über die Flächen dritter Ordnung. Im 67^{ten} Bde. Desselben Journal's findet sich bereits eine bez. Arbeit von Clebsch über die Steiner'sche Fläche Untersuchungen die Linienfläche dritter Ordnung, der sich im 68^{ten} Bde ein Aufsatz über dei Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt anschliesst. (Vergl. Fortschr. d. M. I. p. 258, JFM 01.0258.01).

Der vorliegende Aufsatz, der im Auszuge bereits in den Rend. d. Ist. Lomb. erschienen war (vergl. Bd. I. dieser Fortschritte p. 235, JFM 01.0235.02) giebt zunächst eine übersichtliche Auseinandersetzung der Erscheinungen, welche sich im Allgemeinen bei einer solchen Abbildung einstellen. Geht man von der Abbildungsebene aus, so zeigen sich in ihr eine Anzahl sogenannter Fundamentalpunkte, denen auf der Fläche Gerade, Kegelschnitte, . . ., immer aber rationale Curven entsprechen. Indem der Verf. diese Fundamentalpunkte und die Ordnung der Abbildungscurven ebener Schnitte gegeben sein lässt, bestimmt er die Ordnung der abgebildeten Fläche, den Grad ihrer Doppelcurve, (die eine auf die Ebene abbildbare Fläche im Allgemeinen besitzt), so wie die Singuläritäten der auf der Fläche liegenden algebraischen Raumcurven, welche gegebenen Curven der Bildebene entsprechen. Die Abbildung der Doppelcurve geschieht dabei so, dass jedem ihrer Punkte zwei Punkt der Bildebene entsprechen, so dass in den einfachsten Fällen, wo die Doppelcurve eine rationale Curve ist, das Bild eine hyperelliptische Curve wird. - Statt von der Abbildungsebene kann man auch von der abzubildenden Fläche selbst ausgehen. Dann ist im Allgemeinen ein höheres algebraisches Problem zu lösen, wenn die Abbildung geleistet werden soll, und es entstehen also mehrere gleichberechtigte Abbildungsarten. Beispielweise verlangt die Abbildung der Fläche dritter Ordnung die Kenntniss ihrer 27 Geraden und ist dann auf 72 Weisen möglich.

In der vorliegenden Abhandlung sind die allgemeinen Principien noch insbesondere angewandt zur Untersuchung der Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden, der Fläche fünfter Ordnung mit einer Raumcurve dritter Ordnung als Doppelcurve und der Fläche füngter Ordnung mit zwei sichnicht schneidenden Doppelgeraden. (Eine zusammenhängende Darstellung der Verhältnisse bei der eindeutigen Abbildung ist in neuester Zeit von Darboux in einer Reihe von Aufsätzen des Bulletin des Sciences Mathématiques t. II. Gegeben worden, worauf hier verweisen sein mag.)

Reviewer: Klein, Prof. Dr. (Erlangen)

MSC:

Keywords:

algebraic surfaces

Full Text: DOI Link