Clebsch, A.

On partial differential equations satisfied by the absolute invariants of binary forms under higher transformations. (Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen.) (German)

JFM 02.0103.01
Gött. Abh. XV. 1870 (1870).

Unter einer "höheren" Transformation einer binären Form $f(x_1, x_2)$ hat man das Folgende zu verstehen. Es mögen φ, ψ binäre Formen gleich hohen Grades in den x_1, x_2 sein und man setze:

$$\begin{aligned} \varrho y_1 &= \varphi(x_1 x_2) \\ \varrho h_2 &= \psi(x_1 x_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Sodann eliminire man die x_1, x_2 aus diesen beiden Gleichungen und der gleich Null gesetzten gegebenen binären Form:

$$f(x_1 x_2) = 0.$$

Das Eliminationsresultat hat die Gestalt

$$f'(y_1, y_2) = 0,$$

wo f' eine binäre Form in den y_1, y_2 ist, von gleichem Grade, wie f in den x_1, x_2 war. Man bezeichnet dann f' als die aus f vermöge der höheren Transformation (1) hervorgegangene, transformirte Form.

In dieser Art sind die höheren Transformationen zuerst von Gordan betrachtet worden (Borchardt J. LXXI. 164 siehe p. 69). Aber bereits früher hat man sich vielfach mit einer besonderen Art dieser Transformationen, der sogenannten *Tschirnhausen*'-schen Transformation, beschäftigt. Dieselbe kommt darauf hinaus, aus einer nicht homogenen algebraischen Gleichung:

$$f(x) = 0$$

eine neue, nicht homogene:

$$f'(y) = 0$$

abzuleiten, indem man x aus $f = 0$ und einer Gleichung der Form

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots$$

eliminirt. Hermite hat zuerst darauf aufmerksam gemacht (C. R. XLVI. 961), dass man durch passende Wahl der Coefficienten in der Tschirnhausen'schen Transformation der transformirten Gleichung beliebige Invarianteneigenschaften ertheilen kann. Andererseits hat Brioschi (Atti d. Ist. Lomb. I. 231. 1859) diejenigen partiellen Differentialgleichungen aufgestellt, denen die Coefficienten der transformirten Gleichung zu genügen haben. Gordan hat sodann (*l.c.*) in der vorstehend auseinandergesetzten Form den Begriff der höheren Transformation entwickelt und gezeigt, dass die Invarianten der Form f' simultane Invarianten der gegebenen Form f und der Transformations-Formen φ, ψ sind. Aber nicht umgekehrt ist jede simultane Invariante von f, φ, ψ eine Invariante von f'. Sie muss zu dem Zwecke noch gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen, welche der Verfasser in der vorliegenden Arbeit aufstellt. Diese Differentialgleichungen bilden ein vollständiges System, in dem Sinne, wie dies von dem Verfasser (Borchardt J. LXV. 257) definirt worden ist. Für solche Systeme ist hier also ein neues Beispiel gegeben. Die Integration des Systems wird dann für den Fall der quadratischen Transformationen durchgeführt. Es ergiebt sich dabei noch allgemein das Resultat, dass es bei binären Formen keine Ausdrücke in der Coefficienten giebt, die bei einer höheren Transformation ungeändert, bleiben, dass also binäre Formen, im Gegensatze zu den ternären, keine, "absoluten Invarianten in höherem Sinne", oder, wie man sich bei den ternären Formen gewöhnlich ausdrückt, keine "Moduln" besitzen.

Reviewer: Klein, Prof. Dr. (Erlangen)

MSC:

11E76 Forms of degree higher than two
13A50 Actions of groups on commutative rings; invariant theory

Keywords:

Absolute invariant; Binary form; Higher transformation