Clebsch, A.; Gordan, P.

Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln. (German) JFM 02.0062.01

Clebsch Ann. I, 359-400 (1869).

Seien x_1, x_2, x_3 Punkt-, u_1, u_2, u_3 Linien-Coordinaten; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ symbolische Coefficienten, welche den ersten, a_1, a_2, a_3 solche, welche den zweiten cogredient sind; setzt man ferner

$$p_q = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3,$$

so ist der allgemeinste Ausdruck der zu behandelnden Formen $\alpha_x^m u_x^n$. Jede dem Formenkreise von f angehörige Gestalt kann als symbolisches Produkt folgender 8 Typen dargestellt werden (abu), (abc), $(\alpha\beta x)$, $(\alpha\beta\gamma)$, u_x, u_α, a_x, a_α.

Der erste Theil der Abhandlung ist dem der eben besprochenen durchaus parallel laufend, nur dass die Beweise durch die vermehrte Zahl der Typen eine etwas andere Gestalt annehmen. Für $m = 1$, $n = 1$ also $f = a_x + u_\alpha$ enthält das vollständige System 7 Formen; diese sind $i = a_\alpha$, $f = a_x u_\alpha$, $i_1 = a_\beta b_\alpha$, $f_1 = a_x u_\beta b_\alpha$, $i_2 = a_\beta b_\gamma c_\alpha$, $\varphi = a_x c_x b_\alpha(\beta\gamma x)$, $\psi = u_\beta u_\gamma b_\alpha(acu)$. An Stelle der Invarianten i_1, i_2 und der Zwischenform f_1 werden andere Ausdrücke eingeführt

$$i' = \frac{i^2 - i_1}{2}, \quad i'' = \frac{i^3 - 3ii_1 + 2i_2}{6}, \quad g = f_1 - if + \frac{i^2 - i_1}{2} u_x$$

und mit Hülfe derselben das entsprechende Formensystem für die zusammengestzte Function $F = \kappa u_x + \lambda f + \mu g$ aufgestellt. Zwischen den 7 obigen Formen und u_x besteht eine einzige höhere Relation, enthalten in dem Satze, dass $\varphi.\psi$ die Determinante, in Bezug auf κ, λ, μ gebildet, einer quadratischen Form ist. Setzt man

$$\Omega = \sum \frac{\partial^2 \varphi \cdot \psi}{\partial \chi_h \partial u_h}, \quad \Omega' = \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \chi_h \partial u_h}, \quad \Omega'' = \sum \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial \chi_h \partial u_h},$$

so ist ähnlich $\varphi.\psi + \frac{\varepsilon}{1}\Omega + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\Omega' + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\Omega''$ die Hesse'sche Determinante, nach κ, λ, μ gebildet, der quadratischen Form

$$2[p(f + i\varepsilon) + q(g + i'\varepsilon) + r(u_x + 3\varepsilon)].$$

Ω'' ist $= -6R$, wo R die Determinante einer cubischen Gleichung $\varDelta = 0$ ist; Ω' ist $= -2Ru_x$. Nach Betrachtung des Formensystems der cubischen Formen φ, ψ beschäftigt sich die Abhandlung mit der geometrischen Deutung der Form $f(m = 1, n = 1)$. Wird u als Veränderliche Betrachtet, so stellt $f = 0$ einen Punkt y dar, der mit dem Punkte x_1, x_2, x_3 collinear verwandt ist. Man kann im allgemeinen f durch lineare Transformation in die Form $f = e_1 X_1 U_1 + e_2 X_2 U_2 + e_3 X_3 U_3$ bringen, während u_x im U_X übergeht. Die Gleichung $F = 0$ stellt die Gesammtheit aller collinearen Systeme mit gemeinsamem Fundamentaldreieck dar. Geht man nun von einem Punkte x zu y, betrachtet dann y als dem ersten Systeme angehörig und bestimmt den entsprechenden z, u.s.w., so liegen $x, y, z, \ldots$ auf einer transcendenten Curve. Es wird nun untersucht unter welcher Bedingung $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ dieser Punkte auf einer algebraischen Curve liegen; dieselbe ergiebt sich als eine gewisse Invariantenbeziehung. Umgekehrt werden dann auch solche Invarianten-Relationen geometrisch in der angegebenen Weise gedeutet. – Zum Schluss werden die Ausnahmefälle angegeben, welche dadurch entstehen, dass von den Wurzeln der cubischen Gleichung $\varDelta = 0, 2$ oder 3 einander gleich werden.

Reviewer: Netto, Dr. (Berlin)

Full Text: DOI EuDML