Clebsch, A.

On the geometric interpretation of the higher transformations of bilinear forms and of quintic forms in particular. (Über die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen fünfter Ordnung insbesondere.) (German) JFM 03.0031.02

Gött. Nachr. 1871, 335-345 (1871).

Während die neuere Algebra zunächst die algebraischen Formen nur rücksichtlich linearer Transformationen ihrer Veränderlichen betrachtet, ist ihr doch auch die Untersuchung höherer eindeutiger Transformationen in ähnlicher Weise zugänglich. Dass solche bei binären Formen eben auch nur wieder auf die schon bei linearen Transformationen benutzten Principien führen, geht schon aus den Arbeiten von Hermite und Gordan hervor. In den vorliegenden Untersuchungen handelt es sich um eine Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen, welche dieselben mit den linearen Transformationen eines Raumes von mehreren Dimensionen in Beziehung setzt. Insbesondere erhält man alle Gleichungen fünften Grades, welche aus einer gegebenen entstehen können, indem man die Schnittpunktsysteme betrachtet, welche auf den Geraden einer Ebene durch fünf irgendwie fest gelegte Gerade bestimmt werden. Damit die resultirende Gleichung eine bestimmte Invarianteneigenschaft besitze, muss die veränderliche Gerade, auf welcher das gedachte Schnittpunktsystem eintritt, Tangente einer entsprechenden Curve der Ebene sein. Die auf solche Weise definirten Curven, welche dem festen Fünfseit zugeordnet und durch dasselbe definirt sind, haben merkwürdige Eigenschaften und Beziehungen zu einander. Insbesondere z. B. wird eine Curve 12ter Classe behandelt, welche eine Doppelreihe ausgezeichneter Doppeltangenten besitzt, und durch sie eine genaue geometrische Interpretation für die Eigenschaften der Resolvente sechsten Grades giebt, auf welche die Theorie der Gleichungen fünften Grades führt.

Die geometrische Lösung der Gleichungen fünften Grades, welche den von Hermite und Kronecker gegebenen Lösungen äquivalent ist, beruht auf der Verbindung, in welche die Aufsuchung dieser Doppeltangenten mit der bekannten Modulargleichung und ihrer geometrischen Interpretation gesetzt wird. Hierzu führt der Umstand, dass diese 12 Doppeltangenten eindeutig den Geraden einer Doppelsechs entsprechen, welche einer gewissen merkwürdigen Fläche dritter Ordnung angehört. Diese Fläche, vom Verfasser Diagonalfläche genannt, ist dadurch definirt, dass sie durch die Diagonalen aller Vierseite geht, in denen die Seiten eines Pentaeders von den übrigen geschnitten werden. Unter den 36 Doppelsechsen, welche die Geraden dieser Fläche bilden, wird eine linear, d. h. ohne Lösung einer höheren Gleichung, gefunden; die beiden Sechsen, in welche sie zerfällt, liefern zwei ausgezeichnete Abbildungen der Fläche auf der Ebene, welche zu ihrer Auffindung nur die Lösung einer quadratischen Gleichung bedürfen. Die sechs Fundamentalpunkte einer solchen Abbildung aber bilden ein sehr merkwürdiges Punktsystem, welches die Modulargleichung geometrisch repräsentirt. Diese sechs Punkte haben nämlich die Eigenschaft, in zehn verschiedenen Arten zu einem Brianchon'schen Sechseck zusammengefasst werden zu können; und das System der sechs Punkte ist hierdurch bis auf projectivische Umformungen völlig definirt. Verbindet man aber mit solchen sechs Punkten irgend einen anderen Punkt der Ebene, so erhält man ein System von sechs Strahlen, deren Abstandsverhältnisse, von irgend zwei festen Strahlen durch denselben Punkt gerechnet, Wurzeln der Modulargleichung sind, oder vielmehr Wurzeln einer Gleichung, welche nur durch eine lineare Transformation sich noch von ihr unterscheiden kann.

Reviewer: Clebsch, Prof. (Göttingen)

MSC:

14H50	Plane and space curves
51N35	Questions of classical algebraic geometry
14H37	Automorphisms of curves
15A72	Vector and tensor algebra, theory of invariants

Keywords:

quintic equations; binary quintics; invariants

Full Text: EuDML