Clebsch, A.

On a fundamental problem of invariant theory. (Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.) (German) JFM 04.0062.03

Gött. Abh. XVII., Clebsch Ann. V. 427-435 (1872).

In dieser grossen und von sehr allgemeinem Gesichtspunkte aus angelegten Abhandlung entwickelt Clebsch eine gewisse Umgrenzung des Problems der Invariantentheorie bei n Veränderlichen, welche resultirt, wenn man mit dem Verfasser all solche Bildungen von der Betrachtung ausschliesst, die sich aus bereits betrachteten resp. aus deren Polaren rational und ganz zusammensetzen.

Bei binären Formen hat Gordan in Clebsch Ann. III. (siehe F. d. M. III. 59-60, JFM 03.0059.01), sowie Clebsch in seiner "Theorie der binären Formen" (siehe p. 47) bewiesen, dass es von diesem Gesichtspunkte aus genügt, Formen mit nur einer Reihe von Veränderlichen zu betrachten. In der vorliegenden Arbeit nimmt Clebsch die entsprechende Fragestellung für beliebig viele (n) Veränderliche in Angriff.

Er lehnt sich dabei an die Vorstellung einer $(n-1)$-fach ausgedehnten Mannichfaltigkeit an. Sowie man im Raum im Sinne der projectivischen Geometrie dreierlei Grundgebilde unterscheidet: Punkt, Gerade und Ebene, so bei $(n-1)$ Dimensionen $(n-1)$ lineare Stufen, die bez. durch $1, 2, \cdots (n-1)$ ihnen angehörige Punkte characterisirt und analytisch durch die Determinanten aus den Coordinaten dieser Punkte gegeben sind (vergl. Grassmann's Ausdehnungslehre von 1844). Aber neben diese Auffassung stellt sich, entsprechend dem Principe der Dualität, wie es aus der Geometrie bekannt ist, eine zweite, die von der Ebene, d. h. der durch eine lineare Gleichung zwischen Punktcoordinaten bestimmten Mannichfaltigkeit, als Element ausgehend dieselben Stufen in umgekehrter Reihenfolge ergiebt. Die Coordinaten, welche man entsprechend dieser Auffassung für die Zwischenstufen erhält sind, wie bereits Grassmann (l. c.) und später Brill (Clebsch Ann. IV. siehe F. d. M. III. p. 314-319, JFM 03.0314.01)) zeigten, den ursprünglich für sie aufgestellten proportionirt.

Die allgemeinste Form nun, welche das Object der Invariantentheorie bilden kann, ist eine solche, die von jeder der in diesem Sinne zu unterscheidenden $(n-1)$ Arten von Veränderlichen eine beliebige Anzahl von Reihen enthält. Clebsch entwickelt zur Darstellung solcher Formen zunächst eine besondere Art Symbolik, welche als speciellen Fall die symbolische Darstellung der Linien-Complexe einschliesst, die er bereits bei einer früheren Gelegenheit (Clebsch Ann. II. siehe F. d. M. II. p. 602, JFM 02.0602.01) gegeben hatte. Es wird dabei eine eigenthümliche Umwandlung der gegebenen Form in eine sogenannte Normalform nothwendig, wobei die zwischen den Coordinaten der Zwischenstufen geltenden identischen Beziehungen zur Verwerthung kommen.

An diese symbolische Darstellung schliesst sich dann der Beweis, dass vermöge einfacher Zerlegung jede solche Form ersetzt werden kann durch ein "reducirtes System" von Formen besonderen Characters, nämlich solcher Formen, die von jeder Art der in Betracht kommenden Coordinaten höchstens eine Reihe enthalten. Die Formen dieses reducirten Systems sind Covarianten der gegebenen Grundform, die letztere umgekehrt eine simultane Bildung, abgeleitet aus den Formen des Systems; die Constantenzahl ist beiderseits dieselbe. Die Grundform und ihr reducirtes System können daher einander vertreten, und hierin liegt, dass es genügt, überhaupt nur reducirte Systeme, d.h. solche Formen zu betrachten, welche von den verschiedenen Coordinatenarten jedesmal nur eine Reihe enthalten. Zugleich aber ist auch die Forderung: alle Invarianten-Bildungen, die aus gegebenen Formen hervorgehen, anzugeben, in wesentlicher Weise umgrenzt; denn es genügt wiederum und aus demselben Grunde, einzig reducirte Bildungen in's Auge zu fassen.

Bei ternären Formen z. B. ist hierdurch die Beschränkung auf Invarianten, Covarianten, zugeordnete Formen und Zwischenformen, wie man sie auch sonst eingehalten hat, principiell begründet. Bei quaternären dagegen wird ein sehr viel grösserer Kreis von Bildungen zu betrachten sein, als seither geschah, wobei z. B. die Gleichungen der Linien-Complexe als eine Gruppe erscheinen.

Clebsch führt die Reduction der zu betrachtenden Formen insbesondere für 3 Variable noch weiter. Bereits Gordan hatte in einer oben besprochenen Arbeit über Combinanten (siehe p. 61) Zwischenformen betrachtet, die einer gewissen partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung genügen. Bei ternären Formen darf man sich, wie Clebsch zeigt, eben auf derartige reducirte Bildungen beschränken, wobei deren Constanten, abgesehen von der in en Differentialgleichungen liegenden Beschränkung, unabhängig anzunehmen sind.

Reviewer: Klein, Prof. (Erlangen)

MSC:

11E99 Forms and linear algebraic groups

Keywords:

Form; binary form; ternary form; invariant

Full Text: Link EuDML