Clebsch, A.

The theory of binary quadratic forms. (Theorie der binären algebraischen Formen.) (German)

JFM 04.0047.02
Leipzig. Teubner. Recens. von Th. Kötteritzsch, Schlömilch Litz. XVII. 110-112 (1872).

Mit der Herausgabe dieses Werkes verfolgte der Verfasser den Zweck, die Behandlungsweise der algebraischen Formen, wie sie sich für ihn durch seine eigenen Untersuchungen und die eng mit ihnen zusammenhängenden Arbeiten Gordan's allmählich herausgebildet hatte, dem allgemeinen mathematischen Publicum zugänglich zu machen. Gegenüber den auf denselben Gegenstand bezüglichen Darstellungen Anderer unterscheidet es sich wohl, abgesehen von dem eigentlich Neuen, das es zum ersten Male im Zusammenhange bringt, hauptsächlich durch den streng systematischen Gang der Entwicklung: gewisse allgemeine Probleme werden von Vorneherein als Endziel hingesetzt und die einzelnen Probleme nur in soweit behandelt, als sie die betreffenden allgemeinen Ueberlegungen zu erläutern im Stande sind. Eben hierdurch ist die Beschränkung auf binäre Formen herbeigeführt: bei mehr Veränderlichen lassen sich die betreffenden Gebiete auftreten, noch nicht mit der Vollständigkeit erledigen, als es zum Zwecke einer zusammenhängenden Darstellung wünschenswerth scheinen muss. Die Definition, wie sie Clebsch im Eingange seines Werkes für die invarianten Bildungen (eigentliche Invarianten, Covarianten etc.) zu Grunde legt, ist die rein formale: Invarianten sind aus den Coefficienten gegebener Formen und beliebig vielen Reihen von Variabeln gebildete Ausdrücke, die sich bei einer linearen Substitution bis auf eine als Factor vortretende Potenz der Substitutionsdeterminante reproduciren. Daran anschliessend wird sofort eine Methode entwickelt, um Invarianten mit mehreren Reihen Veränderlicher aus solchen mit nur einer Reihe zusammenzusetzen, es wird insbesondere sofort die Cayley-Aronhold'sche symbolische Darstellung dieser Bildungen eingeführt, deren principielle und ausschliessliche Anwendung die Gestalt, in der die Invariantentheorie bei Clebsch auftritt, wenigstens äusserlich am meisten characterisirt.

Der Verfasser lässt weiterhin einen Abschnitt folgen über die Bedeutung der binären Formen in der projectivischen Geometrie, wobei denn vor Allem Veranlassung ist, die Beziehung darzulegen, die zwischen dem Verschwinden invarianter Bildungen binärer Formen un dem Doppelverhältniss der Relationen der Geometrie besteht. Ueberhaupt wird im ganzen Werke die Verwerthung der erhaltenen algebraischen Resultate, wo sich leichte Gelegenheit dazu bietet, hervorgehoben; dadurch erscheint sie nicht als Hauptzweck, sondern als beiläufige Anwendung.

Weiter werden zunächst solche invariante Bildungen erläutert, die wegen ihrer geometrischen Bedeutung besonders wichtig scheinen: die Resultanten und Discriminanten, sowie überhaupt die Formen zweiter, dritter und vierter Ordnung. Dabei wird insbesondere die Auflösung der Gleichungen 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} Grades, wie sie sich unter Anlehnung an die Invariantentheorie ergiebt, in ausführlicher Weise entwickelt, wie denn diese ersten Abschnitte auch für denjenigen, der nicht beabsichtigt, tiefer in die eigentliche Theorie einzudringen, der sich vielmehr begnügen will, die Modificationen und Verbesserungen kennen zu lernen, welche sie den elementaren Theilen der Gleichungstheorie angedeihen lässt, des Beachtenswerthen die Fülle bietet.

Der sich nun anschliessende Abschnitt über simultane Formen giebt den Uebergang zu denn allgemeinen Untersuchungen über die Endlichkeit der Formensysteme, wie die den eigentlichen Schwerpunkt der ersten Hälfte des Werkes bilden. Dabei werden wieder eine Reihe einfacher Beispiele: Systeme von beliebig vielen quadratischen Formen, Systeme zweier cubischer Formen etc. entwickelt; auch findet ein interessantes Transformationsproblem vom neunten Grade seine Besprechung, das sich auf die Lösung von Gleichungen niederen Grades zurückführen lässt.

So ist dann allmählich so viel Einzelmaterial entwickelt, dass der Gordan'sche Fundamentalsatz der Theorie binärer Formen, demgemäss jede binäre Form (sowie jedes System binärer Formen) ein endliches Formensystem besitzt, Interesse und Verständniss finden kann. Ohne hier auf die Bedeutung dieses Theorems näher einzugehen (man vergl. das bez. Referat in diesen Fortschritten, I. p. 60, siehe JFM 01.0060.01), sei nur die Form des für dasselbe von Gordan erbrachten Beweises hervorgehoben. Der Satz geht nämlich nicht sowohl aus begrifflicher Auffassung dessen, was eine Invariante ist, a priori hervor, sondern er erwächst aus einer Methode, die gestattet, alle Invarianten gegebener Formen vermöge eines bestimmt fortschreitenden Processes (des Ueberschiebungs-Processes) wirklich zu bilden. Man hat sich dann nämlich durch richtiges Anordnen der so entstehenden unendlichen Reihe von Bildungen zu üeberzeugen, dass sich in der That von einer gewissen Stelle ab alle Formen aus bereits vorangegangenen als ganze Functionen zusammensetzen lassen. In diesen allgemeinen Gang, dessen Durchführung eine lange Reihe schwieriger combinatorischer Ueberlegungen erfordert, flicht Clebsch die Theorie der Formen fünften und sechsten Grades als Beispiele ein und stellt vollständige Systeme für dieselben auf, die nicht nur endlich, sondern überhaupt wohl unter den endlichen die kleinstmöglichen sind.

Die weiteren Abschnitte des Werkes sind den erstgenannten typischen Darstellungen binärer Formen gewidmet, wie sie zuerst von Hermite aufgestellt wurden, und deren Zweck es hauptsächlich ist, die unbegrenzte Reihe der zu gegebenen Formen gehörigen Bildungen durch rationale Functionen einer endlichen Anzahl derselben zu ersetzen. Insbesondere bespricht Clebsch die typischen Formen, die man aus den Grundformen selbst ertheilen kann, wenn man, falls sie existiren, zwei lineare Covarianten oder, in Ermangelung derselben, drei quadratiche Covarianten statt der gewöhnlichen Coordinaten einführt. Ohne hier auf alle dabei berührten einzelnen Probleme einzugehen, was nich wohl möglich scheint, sei hervorgehoben, dass Clebsch dort Gelegenheit nimmt, das Problem der Transformirbarkeit zweier Formen in einandeer, die Auflösung der Gleichungen vierten Grades unter Benutzung der typischen Form, verschiedene Aufgaben aus der Transformationstheorie der elliptischen Functionen etc. etc. zu besprechen und , soweit es die bis dahin entwickelten algebraischen Hülfsmittel gestatten, durchzuführen.

Die Vorrede zu diesem Werke hat Clebsch vom September 1871 datirt; sie wurde, soviel Referent bekannt, in Anlehnung an die vom Verfasser wiederholt gehaltenen Vorlesungen über Formentheorie wesentlich im Winter 1870/71 niedergeschrieben. Seitdem hat sich Clebsch wiederholt damit beschäftigt, in ähnlicher systematisch abgeschlossener Weise wie hier die binären Formen, auch höhere Probleme zu erledigen. Es sei mit Bezug darauf nur auf die beiden Referate über die Abhandlungen von Clebsch: Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invaiantentheorie (siehe das folgende Capitel) und : Ueber das Fünfseit und die Gleichungen fünften Grades (Clebsch Ann. III. p. 33 siehe Fortschr. d. M. III. p. 31, siehe JFM 03.0031.01) verwiesen. Auch sei der Selbstanzeige gedacht, die Clebsch von seinem Buche in den Göttinger Anzeigen gegeben hat (1872, Februar), sowie erwähnt, dass in der neuerdings erschienenen Biographie desselben (Clebsch Ann. VII.) die Arbeiten über Invariantentheorie, wie sie hier in Betracht kamen, ausführlich besprochen sind.

Reviewer: Klein, Prof. (Erlangen)

MSC:

11E04	Quadratic forms over general fields
12E05	Polynomials in general fields (irreducibility, etc.)

Keywords:

Quadratic form; polynomial; invariant

Full Text: Link