Brill, Alexander; **Nöther, M.**

On algebraic functions and the use in geometry. (Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie.) (German) JFM 06.0251.01

Clebsch Ann. VII, 269-316 (1874).

Durch die Anwendung der Theorie der Abel'schen Functionen war es gelungen, interessante Sätze der Geometrie zu beweisen, die an sich gar nicht den transcendenten, sondern einen rein algebraischen Charakter hatten. Die hieraus entspringende Aufgabe, diese Sätze mit Anwendung rein algebraischer Hülfsmittel zu beweisen, lösen die Verfasser des vorliegenden Aufsatzes. Der Betrachtung liegt zu Grunde eine ebene, nicht zerfallende, algebraische Curve n^{ter} Ordnung, (deren vielfache Punkte getrennte Tangenten haben), und die Gruppen von Punkten, welche auf ihr durch sogenannte adjungirte Curven ausgeschnitten weren. Von zwei Gruppen von Punkten heisst die eine das Residuum der andern, wenn beide zusmmen den vollständigen Schnitt der gegebenen Curve mit einer adjungirten bilden. Mit Hülfe dieses Begriffes lautet nun der sogenannte Restsatz: Wenn mehrere Punktgruppen G_R, $G_{R'}, \dots$ corresidual sind, d. h. dasselbe Residuum haben, so ist jedes Residuum einer von ihnen zu allen übrigen auch Residuum.

Dieser Satz zeigt, dass die von einer Curvenschaar ausgeschnittene Schaar von Punktgruppen von der ausschneidenden Curvenschaar in gewissem Sinne nicht abhängt, und zwingt so zur Betrachtung solcher Schaaren von Punktgruppen, die jedoch auf lineare Schaaren beschränkt wird. Bezeichnet man mit Q die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte einer Gruppe, die einer q-fach unendlichen Schaar, (∞^q)-Schaar von Gruppen angehört, welche durch adjungirte Curven s^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden, so bestehen die Ungleichngen, dass für

$$s > n-3 \quad q \geqq Q-p,$$

$$s = n-3 \quad q \geqq Q-p+1$$

ist. p ist hierbei eine nur von der gegebenen Curve abhängige Zahl "das Geschlecht", die, wenn α_i die Zahl der i-fachen Punkte ist, durch die Formel

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \alpha_i \frac{i(i-1)}{2}$$

gegeben wird.

Es ist von Wichtigkeit, dass sich die zweite der obigen Ungleichungen umkehren lässt: eine Schaar, welche ihr genügt, kann nämlich stets durch adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten werden. Nur wenn $Q > 2p-2$ ist, ist dies nicht der Fall, weil solche Gruppen nicht existiren können. Daraus aber lässt sich beweisen, dass nur p linear unabhängige adjungirte Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung existiren.

Die Gruppen, welche der Ungleichung $q > Q-p+1$ genügen, werden Specialgruppen genannt, weil nicht alle Q-Punkte einer Gruppe willkürlich sind. Von ihnen gilt der Riemann-Roch'sche Satz, welcher aussagt, dass, wenn man durch eine Specialgruppe einer Schaar, für welche $q = Q-p+1+r$ ist, eine adjungirte Curve $(n-3)^{ter}$ Ordnung legt, diese in $R = 2p-2-Q$ weiteren Punkten schneidet, die ihrerseits einer $r = (R-p+1+q)$-fach unendlichen Schaar angehören, so dass die Gleichungen bestehen

$$Q + R = 2p-2$$

$$Q - R = 2q - 2r.$$

Die bewiesenen Sätze gestatten nun einfach den Nachweis zu führen, dass die Zahl p bei eindeutiger Transformation erhalten bleibt. Zugleich zeigen die vorher gefundenen Ungleichungen, dass man, um der transformirten Curve einen möglichst niedrigen Grad zu ertheilen, Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung zur Transformation wählen muss. Ausnahmen könnten, wie gezeigt wird, nur für sogenannte hyperelliptische Curven Statt haben, bei welchen man sich Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung bedienen muss.

Die erste Abtheilung der Abhandlung schliesst mit der Angabe des Verfahrens, welches anzuwenden ist, um die Modificationen zu finden, die vielfache Punkte mit zusammenfallenden Tangenten hervorrufen, und welches darin besteht, durch quadratische Transformationen diese Punkte aufzulösen.

Der zweite Theil betrachtet die Specialgruppen, aber nur auf solchen Curven, welche die allgemeinsten ihres Geschlechtes sind, so dass z. B. hyperelliptische Curven ausgeschlossen sind. Indem das Problem eine ∞^r-Schaar von Gruppen von je R-Punkten zu finden durch Zurückführung auf ein anderes behandelt wird, ergiebt sich die Ungleichung

$$R \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1},$$

welche die kleinsten Werthe von R liefert, die zu gegebenem $p < r$ gehören können, und die je nach der Form der Zahl p verschiedenen sind. Freilich führt die Untersuchung, ob die zur Lösung des Problems dienenden Gleichungen keinen Widerspruch enthalten, nur in speciellen Fällen zum Ziele; wie in dem der Ermittelung einer einfach unendlichen Schaar von Gruppen. Diese Bestimmungen finden Verwendung bei der Aufsuchung der Curve niedrigster Ordnung, auf die sich eine gegebene durch eindeutige Transformationen reduciren lässt. Diese, Normalcurve genannte, Curve ist von der Ordnung $p-\pi+2$ mit $\frac{1}{2}(p-\pi+1)(p-\pi)-p$ Doppelpunkten, wenn $p=3\pi$ oder $3\pi+2$ ist. Die gefundenen Resultate gestatten nun, die Frage nach der Anzahl der Moduln einer Classe von Curven zu erledigen. Auf verschiedenen Wegen ergiebt sich übereinstimmend mit Riemann die Zahl $3p-3$. Der erste hängt ab von der Bestimmung der Berührungscurven eines Büschels von adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch $p-2$ feste Punkte gehen. Eine hierbei auftretende Schwierigkeit wird umgangen, indem man die $p-2$ Basispunkte passend wählt. Ein zweiter Weg beruht auf der Benutzung desjenigen Curvenbüschels, welches eine Schaar von Gruppen von möglichst wenig Punkten ausschneidet, und welches auch bei Herstellung der Riemann'schen Normalform Verwendung findet. Endlich findet man dieselbe Zahl auch durch Betrachtung der Normalcurven niedrigsten Grades. Auch auf Raumcurven lassen sich diese Betrachtungen anwenden und führen dann zu dem Satze, dass zu derselben Classe von algebraischen Curven mit allgmeinen Moduln eine $\infty^{4R-3p+3}$-Schaar von Raumcurven vom Geshlechte p und der Ordnung R gehören $(R \geqq \frac{3}{4}[p+4])$, während es überhaupt ∞^{4R} Raumcurven R^{ter} Ordnung und vom Geschlechte p giebt $(p \leqq \frac{4}{3}R-4)$. Mehr zur ersten Abtheilung als zur zweiter gehört endlich der letzte Paragraph, der von der Ermittelung von Special-Punktgruppen der Ebene handelt, d. h. solcher Gruppen, welche, als Basispunkte einer Curvenschaar betrachtet, eine höhere Schaar zulassen als die directen Abzählungen ergeben. Es wird gezeigt, wie sich aus den Eigeschaften einer einzelnen Curve der Schaar solche Curvenschaaren ableiten lassen.

Reviewer: Lüroth, Prof. (Carlsruhe)

MSC:

14H05	Algebraic functions and function fields in algebraic geometry	Cited in **8** Reviews
14H10	Families, moduli of curves (algebraic)	Cited in **27** Documents

Keywords:

Algebraic curves; genus; adjoint curve; moduli

Full Text: DOI

References:

[1] Diese Schlussweise ist zwar schon lange bekannt (vgl. z. B. Plücker, Theorie der algebr. Curven; Einleitung.); die Grenzen ihrer Berechtigung sind indessen erst in jüngerer Zeit angegeben worden. (S. d. folgende Note.)

[2] Nöther, Math. Annalen Bd. VI. S. 351, wo gezeigt wird, dass die Curve {\(\alpha\)}B=0, wenn sie auf die Form der rechten Seite soll gebracht werden können, in jedemi-fachen Punkt vonf=0, in welchemA=0 einenk-fachen Punkt besitzt, entweder gewisse specielle Singularitäten oder wenigstens einenk +i 1-fachen Punkt haben muss.

[3] Auf einer Curve 7. Ordnung mit 9 Dp. (p=6) kann man (wie weiter unten gezeigt wird) Gruppen von 4 PunktenG 4 so bestimmen, dass durch sie noch eine -Schaar von adjungirtenC 4 geht. Diese schneiden in einer Schaarg (2) 6 , die demnach eine Specialschaar ist. Nach dem oben ausgesprochenen Satzgehört aber dann auch die Gruppe G 4 einer Special-Schaar g 4 1 an; d. h. durch jede Gruppe der Schaar g 6 2 lässt sich noch ein .Büschel von adj. C 4 Legen.

[4] Was unter "adjungirten Curven" für den Fall einer Curvef mit besonderen Singularitäten zu verstehen ist, wird unten ({\S} 7.) näher definirt. Mit Rücksicht hierauf haben wir den obigen Satz gleich in seinerallgemeinen Form ausgesprochen.

[5] Gött. Nachrichten 1871, S. 217.

[6] S. Brill, Math. Annalen, Bd. VI. S. 61 ff. (Einen in der Formel für (7)4 (S. 63) befindlichen Fehler verbessere man nach dem Druckfehler-Verzeichniss des Vl. Bandes.)

[7] 1st nämlich nur die Lage der Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche gegeben, so können zwar fürjede der zugehörigen algebraischen Functionen diese Punkte alsdieselben Blätter verbindend angesehen werden (s. Lüroth, Math. AnN. Bd. IV, S. 181 und Clebsch ibid. Bd. VI, S. 216), aber die Art des Zusammenhangs der einzelnen Blätter (die Lage der "Verzweigungsschnitte") kann immer noch eine wesentlich verschiedene sein. Vgl. Thomae, Borchardt's Journal Bd. 75, S. 224.

[8] Dieser Weg ist vor längerer Zeit schon von Herrn Weierstrass eingeschlagen worden.

[9] Vgl. Jonquières, in Borchardt's Journal Bd. 66, wo indess der vorliegende Fall adjungirter Berührungscurven nicht unmittelbar berücksichtigt ist, sowie Brill, Ueber zwei Berührungsprobleme, Math, Annalcn IV, S. 530.