Clebsch, Alfred

Lectures on Geometry. Revised and edited by F. Lindemann. With a preface by F. Klein. First volume: Plane geometry. (Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. Mit einem Vorwort von F. Klein. Erster Band: Geometrie der Ebene.)

(German) JFM 08.0421.01
Leipzig. Teubner (1876).

Man kann an dem umfangreichen, ein ausgedehntes Gebiet der heutigen Wissenschaft umfassenden Werk der leichteren Orientirung wegen zwei Partien unterscheiden, die zwar in Inhalt und Form in einander eingreifen, ihre verschiedene Entstehungsweise jedoch nicht verläugnen würden, auch wenn der Herausgeber nicht durch ausführliche Nachweise über den ursprung der einzelnen Abschnitte des Werks den Ueberblick erleichtert hätte. Der eine Theil, dem die erste, zweite, und wesentliche Partien der dritten und fünften Abtheilung zuzurechnen sind, ist eine Bearbeitung mehrerer zu verschiedenen Zeiten gehaltenen Vorträge von Clebsch, die mit verhältnissmässig geringen Aenderungen und Zusätzen wiedergegeben werden. Der andere Theil dagegen ist der Hauptsache nach ein Werk des Herausgebers, und entwickelt in freier Bearbeitung von Vorlesungsfragmenten, manuscripten und Originalarbeiten von Clebsch und Aufsätzen von Späteren ein Bild des heutigen Standes der Forschung in den von Clebsch zuerst betretenen oder doch von ohm hauptsächlich cultivirten Gebieten der Geometrie der Ebene. Nicht wenige Partien des Werks, und namentlich die voraustehenden Abschnitte über Kegelschnitte, an vielen Stellen die Theorie der algebraischen Formen und der Curven 3^{ter} Ordnung, lassen in ihrer Disposition, der einheitlichen Durchbildung der Beweise und der fliessenden Diction die Art des Vortrags erkennen, durch die Clebsch seine Zuhörer in so hohem Grad zu fesseln wusste. Clebsch liebte es, in seinen höheren Vorlesungen bis zu den ihn gerade beschäftigenden Fragen vorzudringen, und war daher, indem er wenig vorauszusetzen pflegte, genöthigt, durch rasches, den Zuhörer nicht schonendes Vorgehen einen grossen Stoff zu bewältigen, wobei er sich nicht auf Andeutungen und Hervorheben bloss des Wesentlichen beschränkte, sondern an der Hand des Beweises jedes Glied der Schlusskette sorgfältig ausbildete. Sein Vortrag war einfach, fliessend und , obwohl frei, formell doch künstlerisch durchgebildet; den Zuhörer verliess nie die Vorstellung, dass der Vortragende den Apparat der Analysis, dessen er sich bediente, wie spielend beherrschte. Wenn man übrigens zwei Klippen bezeichnen kann, die der Vorlesung des Mathematikers drohen, so dass er leicht der einen anheimfällt, wenn er die andere meidet, so lehrt das vorliegende Werk, dass Clebsch mehr wie den Vorwurf der Stoffüberlastung und der damit zusammenhängenden mangelnden Abgrenzung der einzelnen Sätze und Beweise den der Langweiligkeit und Breitspurigkeit fürchtete, die sehr leicht eine allzu minutiöse Detailausbildung begleiten, wodurch denn der Studirende verwirrt und abgeschreckt wird, statt eine Vorstellung von dem Umfang einer Disciplin und den Hülfsmitteln zu erhalten, mit denen die Wissenschaft arbeitet. Die Spuren der künstlerischen Thätigkeit des Vortragenden findet man an vielen Orten auch in dem vorliegenden Werk wieder, und man darf es dem Herausgeber Dank wissen, dass er dieselben zu erhalten bemüht war. Dass andererseits manche Abschnitte, darunter namentlich diejenigen, in welchen derselben selbst schaffend auftritt, im Verhältniss zu den übrigen zu umfangreich gerathen sind und dem ersprünglichen Plan wie dem Titel des Werks nicht mehr entsprechen, hat der Herausgeber in der Vorrede unumwunden zugestanden. Die Selbständigkeit der Auffassung indess und die mancherleit neuen Gedankengänge, die man darin findet, sind unzweifelhafte Vorzüge auch dieser Partien, und man kann es als eine charakteristische Eigenthümmlichkeit des Werkes überhaupt bezeichnen, dass dem Herausgeber, bezw. Verfasser, indem er die Schwierigkeiten nicht meidet, sondern vielmehr aufsucht, mit der unter seinen Händen wachsenden Aufgabe sichtlich von Capitel zu Capitel auch die Gesichtspunkte und die Kräfte zur Bewältigung der Hindernisse wachsen, so dass man ihm nur wünschen kann, dass ihm durch eine zweite Auflage die Gelegenheit zur Beseitigung der vorhandenen Ungleichheiten zu Theil werde.

Eine kritische Beleuchtung des Werkes im Ganzen und der Abtheilungen 4 und 6 insbesondere gab Nöther in dem Literaturbericht der Z. f. M. von Schlömilch, Jahrg. 1877. Unter Bezugnahme auf diese Besprechung, der er in allen wesentlichen Punkten beipflichtet, beschränkt sich Referent im Folgenden auf eine kurze Analysirung des Inhaltes und insbesondere der dem Herausgeber eigenthümlichen Ausführungen. Das Buch zerfällt in sieben Abtheilungen. Die erste enthält die elementaren Begriffe und Sätze der analytischen und synthetischen Geometrie, deren Methoden ununterschiedlich benutzt werden. Die zweite

Abtheilung handelt von den Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe. An die elegant formulirte Theorie der Polaren und die Darlegung dessen, was man unter unendlich weit in projectivischem Sinn versteht, schliesst sich die Transformation der Gleichung 2^{ten} Grades auf die Normalform, Betrachtungen über Kegelschnittbüschel und den Kreis, wobei die unterscheidenden Merkmale der metrischen (gegenüber der projectivischen) Geometric angegeben werden. Die dritte Abtheilung ist eine Einleitung in die Theorie der algebraischen Formen und handelt von den Invarainten binärer und ternärer Formen und deren symbolischer Darstellung. Es folgt (vierte Abtheilung) eine allgemeine Theorie der algebraischen Curven: die Singularitäten derselben und die Plücker'schen Formeln (die Angabe S. 354 über das Verhalten der Hesse'schen Curve in einem r-fachen Punkt der Grundcurve ist dahin zu verbessern, dass dieselbe dort einen $(3r-4)$-fachen Punkt besitzt, wovon r Zweige die der gegebenen Curve berühren, ein Abriss über Charakteristiken mit einem von dem Herausgeber herrührenden neuen Beweis des Fundamentalsatzes dieser Theorie.

Die weiteren Abschnitte der vierten Abtheilung sind der Geometrie auf einer algebraischen Curve gewidmet, d. h. der Betrachtung gewisser Punktgruppen auf einer Curve, die durch ihre Beziehungen zu vollständigen Schnittpunktsystemen einen selbständigen Charakter haben, ohne selbst solche zu sein. Dieses Gebiet, welches bis dahin der Functionentheorie angehört hatte und nur in Verbindung mit dieser gelehrt wurde, ist erst durch neuere Arbeiten der algebraischen Geometrie, der es dem Inhalt seiner Sätze nach angehört, zugewiesen worden, fügt sich aber darum den sonst geläufigen Vorstellungen der Geometrie noch nicht so bequem ein, dass es nicht der ganzen Kunst des Darstellenden bedürfte, um es dem Leser leicht zugänglich zu machen. Die Erkenntniss dieser Schwierigkeit veranlasst hier de Herausgeber, zuweilen an Beispielen und concreten Fällen (die freilich wohl manchmal erst nachträglich betrachtet werden) zu deduciren, wenn die Sätze oder Beweise in ihrer vollen Allgemeinheit beim ersten Anblick schwer verständlich und so zu sagen wesenlos erscheinen. Es folgt ein Beweis des erweiterten Coorespondenzprincips (Correspondenz von Punkten auf einer Curve, deren Geschlecht von Null verschieden ist), wobei der Herausgeber die Gleichung der Coincidenzcurve in einigen Fällen wirklich aufzustellen unternimmt, ferner ein gewisser Reciprocitätssatz über Berührungspunkte, der ebenfalls von dem Verfasser in einer ihm eigenthümlichen Weise abgeleitet wird, ein Capitel über eindeutige Ebenentransformation und über die Untersuchung der Singularitäten einer Curve.

Aus dem Abschnitt über Curven 3^{ter} Ordnung und 3^{ter} Klasse (5. Abtheilung) heben wir hervor ine Aufzählung der verschiedenen Erzeugungsweisen derselben, eine Tabelle der projectivisch interessanten Ausartungen und deren Zusammenhang mit den ternären Formen 3^{ten} Grades, sowie ein Capitel über die Verwerthung der elliptischen Functionen in der Theorie der Curven 3^{ter} Ordnung. Die sechste Abtheilung handelt von den zu einer algebraischen Curve gehörigen Abel'schen Integralen und dem fundamentalen, von Clebsch zuerst dargelegten Zusammenhang der Functionentheorie mit der Theorie der Curven und deren eindeutiger Transformation. Es wird zunächst die algebraische Seite der Frage beleuchtet, wobei gelegentlich eines Beweises des Geschlechtssatzes eingehender, als dies sonst wohl geschehen ist, der Process der Absonderung des Multiplicators bei eindeutiger Transformation einer Curve verfolgt wird. Zu einem ausführlichen Excurs veranlasst den Herausgeber die Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Punktepaare von zwei Correspondenzen auf einer gegebenen Curve, wobei er durch den von ihm gewählten Beweisgang zur Erledigung des bisher noch unerörtert gebliebenen Falles geführt wird, dass die singulären Punkte der gegebenen Curve nicht sämmtlich Basispunkte der "Correspondenzcurven" sind. Diese umfangreiche Untersuchung, die ein Eingehen auf verschiedene Specialfälle nöthig machte, wäre nach Ansicht des Referenten besser in einer Separatabhandlung veröffentlicht worden, in welcher zugleich der dem Verfasser eigenthümliche Gedankengang eine freiere Entwickelung hätte finden können. Es folgt eine Anwendung der gewonnenen Sätze auf die Bestimmung von "Specialpunktgruppen", d. h. von Punkten einer festen Curve von der Beschaffenheit, dass eine (einfach oder mehrfach unendliche) Schaar von Curven, welche die Doppel- und Rückkehrpunkte der festen Curve und eine gewisse Anzahl von Punkten der Specialgruppe zu Basispunkten hat, von selbst und ohne weitere Einbusse an Bestimmungsstücken durch die übrigen Punkte dieser Gruppe hindurchgeht. Indem sodann der Herausgeber das fernabliegende functionentheoretische Gebiet betritt, sieht er sich genöthigt, wichtige Sätze durch Bezugnahme auf anderweitig bewiesene Eigenschaften zu begründen. Er schliesst die sechste Abtheilung mit der Formulirung des Jacobi'schen und des von Clebsch zuerst aufgestellten "erweiterten" Umkehrproblems der Abel'schen Functionen und mit Anwendungen auf Curven vom Geschlecht Null, Eins und Zwei.

Die siebente Abtheilung ist dem "Connexe" gewidmet, einem geometrischen Gebilde, das durch eine aus Punkt- und Linien-Coordinaten gemischte Gleichung dargestellt wird. Untersuchungen über dieses Gebilde sind das letzte Vermächtniss, das Clebsch der Geometrie hinterlassen hat. Der Aufbau der begrifflichen Grundlage dieser Untersuchungen verdient, unter die bedeutendsten Leistungen Clebsch's gezählt zu werden. In der Abhandlung "Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invaraintentheorie" hat Clebsch gezeigt, wie man eine Zwischenform auf ein System von Formen mit je nur einer Reihe von Variabeln zurückführen könne; die Anwendung auf Connexgleichungen bildet den ersten Abschnitt der 7ten Abtheilung des Werks. Es folgt ein Abschnitt über die Haupteigenschaften des Connexes und der "Coincidenz", deren eindeutige Transformation und den dabei sich ergebenden Geschlechtsbegriff, sowte über den merkwürdigen Zusammenhang der Hauptcoincidenz mit den algebraischen Differentialgleichungen 1ter Ordnung und deren singulären Lösungen. Den Schluss bildet ein elegant geschriebener Abschnitt über Differentailgleichungen und "Berührungstransformationen."

Der Umfang und die Anlage des Buchs lassen ein genaues Inhaltsverzeichniss unentbehrlich erscheinen; diesem Bedürfniss begegnet in dankenswerther Weise das dem Schluss angefügte alphabetische Namen- und Sach-Register.

Reviewer: Brill, Prof. (München)

MSC:

14-XX Algebraic geometry

Keywords:

plane algebraic curves; Abelian integrals; invariants

Full Text: Link