Wangerin, A.
Ueber die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen. (German) JFM 10.0663.03
Berl. Monatsber. 1878, 152-166 (1878).

Es ist ein Körper und eine dreifach orthogonale Flächenschaar mit den Parametern $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ gegeben, der die Begrenzung des Körpers angehört, dann lassen sich in gewissen Fällen Particularlösungen von $\Delta V = 0$ in der Form $\lambda R R_1 R_2$ aufstellen, wo R, R_1, R_2 Functionen von den $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ allein mit zwei willkürlichen Constanten sind, während λ eine allen Particularlösungen gemeinsame Function aller drei Parameter ohne willkürliche Constante bedeutet. In der vorliegenden Abhandlung wird nun die Frage nach der Gestalt der Körper, welche solche Particularlösungen zulassen, allgemein für den Fall beantwortet, dass die Körperbegrenzung und die beiden Schaaren ϱ und ϱ_1 Rotationsflächen mit gemeinsamer Axe sind. Als Resultat ergiebt sich zunächst folgendes: Die rechtwinkligen Coordinaten x, r eines Punktes der Meridiancurve müssen mit den Parametern t, u der orthogonalen Meridiancurvenschaaren durch eine Gleichung von der Form $x + ir = F(t + iu)$ zusammenhängen, ferner muss F so beschaffen sein, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{r^2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right\} = \frac{1}{r^2}\{F'(t+iu) + F'(t-iu)\}$$

die Form $\varphi(t) + \psi(u)$ annimmt. Diese Bedingungen waren schon von Hrn. C. Neumann als hinreichend erkannt worden, wesentlich ist jedoch, dass sie hier auch als nothwendig nachgewiesen werden. Die weitere Verfolgung dieser Bedingungen führt dann nach Elimination des Arguments $t - iu$ zu den eleganten Resultat, dass F eine elliptische Function von $t + iu$ sein muss. Hieraus folgt dann weiter, dass die allgemeinste Form der gesuchten Curven durch die Gleichung

$$(x^2 + r^2)^2 + Ax(x^2 + t^2) \pm B^2 x^2 \pm C^2 r^2 + E^3 = \pm D^4$$

gegeben ist, welche durch die Substitution

$$x + ir = \frac{\alpha + \beta(x_1 + ir_1)}{\alpha' + \beta(x_1 + ir_1)}$$

aus der Form

$$(x_1^2 + r_1^2)^2 + Ax_1^2 + Br_1^2 = \pm D$$

hervorgeht.

Reviewer: Bruns, Prof. (Berlin)