Weber, H.

Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. (German) JFM 10.0643.01

Clebsch Ann. XIV, 173-207 (1879).

Das hier behandelte Problem ist das der Bewegung eines festen Körpers in einer unendlich ausgedehnten incompressiblen Flüssigkeit, unter der Vorassetzung, dass keine beschleunigenden Kräfte auf den Körper wirken, dass ferner der Körper hinsichtlich seiner Gestalt und Massenvertheilung drei zu einander rechtwinklige Symmetrieebenen besitzt, endlich unter einer beschränkenden Annahme über den Anfangszustand. Es ist, abgesehen von der letzten Beschränkung, derselbe Fall einer solchen Bewegung, von dem Clebsch (Clebsch Ann. Bd. III. p. 238, cfr. F. d. M. II. p. 733, JFM 02.0733.01) durch Angabe des letzten Multiplicators gezeigt hat, dass er sich durch Quadraturen darstellen lasse. Eigenthümlich und lehrreich ist der Weg, auf dem der Verfasser zum Ziele gelangt. Den Ausgangspunkt bildet die Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlicher, speciell die Relationen zwischen den Quadraten von je vier Thetafunctionen und zwischen drei Producten von je zwei verschiedenen Thetafunctionen. Alle diese Formeln werden, des besseren Verständnisses wegen, vollständig abgeleitet. Eine aufmerksame Betrachtung der genannten algebraischen Relationen lässt nun leicht erkennen, dass man unter den Quotienten zweier Thetafunctionen auf mehrfache Art neun solche auswählen kann, welche den Bedingungen für die Transformationscoefficienten zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme identisch genügen. Für die Theorie der Thetafunctionen selbst gewährt diese Darstellung den Vortheil, dass ein grosser Theil der für diese Formeln der rechtwinkligen Coordinatentransformation zurückgeführt wird. Ist nun ξ, η, ζ ein im Raume festes, x, y, z ein veränderliches Coordinatensystem, ist also

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,\\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,\end{aligned}$$

so drücke man die neun Coefficienten $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \gamma_3$ durch die Quotienten passend gewählter Thetafunctionen der Variablen v_1, v_2 aus und setze für diese Variablen lineare Functionen der Zeit, während α, β, γ noch unbestimmte Functionen der Zeit sind. Für das veränderliche Coordinatensystem lassen sich dann die Componenten p, q, r der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit ebenfalls durch Thetafunctionen ausdrücken. Von den so erhaltenen Ausdrücken wird nun gezeigt, dass sie den sieben Integralgleichungen genügen, die Kirchhoff für die Bewegung eines festen Körpers, auf den keine Kräfte wirken, in einer incompressiblen Flüssigkeit aufgestellt hat (siehe Kirchhoff Mechanik, Vorlesung 19, §2), falls man noch eine der Constanten der Kirchhoff'schen Gleichungen verschwinden lässt, was ja nur eine specielle Voraussetzung über den Anfangszustand involvirt. Für die drei Thetamoduln ergiebt sich, damit sämmtliche Gleichungen befriedigt werden, nur eine Relation, so dass noch zwei von den ϑ-Moduln, sowie die zwei additiven Constanten in den linearen Functionen der Zeit zur Berücksichtigung des Anfangszustandes verfügbar bleiben.

Weiter wird nun der entgegengesetzte Weg zur Lösung desselben Problems eingeschlagen, indem die Integration der Differentialgleichungen direct durch hyperelliptische Integrale bewerkstelligt wird. Es werden zu dem Zwecke $\alpha_1; \alpha_2, \alpha_3$ zunächst durh zwei neue Veriable x_1, x_2 ersetzt, so dass die Bedingung

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

identisch erfüllt wird.

$$\alpha_1^2 = \frac{(\delta_1 - x_1)\,(\delta_1 - x_2)}{(\delta_1 - \delta_2)\,(\delta_1 - \delta_3)}, \quad \alpha_2^2 = \frac{(\delta_2 - x_1)\,(\delta_2 - x_2)}{\delta_2 - \delta_3)\,(\delta_2 - \delta_1)},$$

$$\alpha_3^2 = \frac{(\delta_3 - x_1)\,(\delta_3 - x_2)}{(\delta_3 - \delta_1)\,(\delta_3 - \delta_2)}.$$

$\delta_1, \delta_1, \delta_3$ sind noch zu bestimmende Constanten. Dann lassen sich p, q, r ebenfalls durch x_1, x_2 ausdrücken, und zwar algebraisch. Diese sechs Functionen $p, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ lassen sich aber von den übrigen noch zu bestimmenden Functionen ganz trennen, und aus den für sie gültigen Gleichungen folgt:

$$\frac{dx_1}{R(x_1)} + \frac{dx_2}{R(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda}}{\mu} dt,$$

$$\frac{x_1 dx_1}{R(x_1)} + \frac{x_2 dx_2}{R(x_2)} = \frac{2k\sqrt{\lambda} \cdot \nu}{\mu} dt,$$

wobei

$$R(x) = \sqrt{-(\delta_1 - x)(\delta_2 - x)(\delta_3 - x)(\delta_4 - x)(\delta_5 - x)}$$

ist, während $k, \lambda, \mu, \delta_1, \delta_5$ Constante sind. Weiter lassen sich auch $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta$ und γ algebraisch durch x_1 und x_2 ausdrücken, während sich für α die Summe zweier hyperelliptischer Integrale der zweiten Gattung ergiebt.

Die Discussion der verschiedenen hinsichtlich der Constanten möglichen Fälle ergiebt, dass der oben (mit Hülfe der Thetafunctionen) behandelte Fall nur einer von vier ähnlichen gleich möglichen ist, die sich durch die Beschaffenheit des Anfangszustandes von einander unterscheiden. Jener Fall ist allerdings insofern der interessanteste von den vieren, als darin derjenige enthalten ist, in dem gar keine anfängliche Rotation vorhanden ist. Um nun in allen vier Fällen die sämmtlichen unbekannten Functionen vermittelst der Thetafunctionen durch die Zeit darzustellen, werden zum Schluss die obigen hyperelliptischen Integrale umgekehrt und die umgekehrten Functionen, sowie auch die bei α vorkommenden Integrale der zweiten Gattung durch Thetafunctionen ausgedrückt. Auf die Einzelnheiten dieses Theils hier einzugehen, würde zu weit führen. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf die Arbeit selbst.

Reviewer: Wangerin, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Vgl. Hermite "Sur la Theorie de la Transformation des fonctious Abéliennes". No. IX. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome XL (1855).

[2] Vgl. Weierstrass "Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid" (Monatsbericht der Berliner Akademie vom 31. Oct. 1861) sowie des Verfassers Abhandlung "Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung" Borchardts Journal Bd. 82. Seite 131.