Dedekind, R.; Weber, H.

The theory of algebraic functions of one variable. (Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen.) (German) JFM 14.0352.01

Kronecker J. 92, 181-291 (1882).

Zweck dieser ausführlichen Arbeit ist, die Entwickelung einer allgemeinen und strengen Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen zu geben, ohne beschränkende Voraussetzungen über die Singularitäten derselben zu machen und ohne von den Grundsätzen über Stetigkeit und Entwickelbarkeit von Functionen überhaupt Gebrauch zu machen, welche z. B. der Riemann'schen Theorie zu Grunde liegen, die aber bezüglich einer strengen Begründung bisher noch gewisse Schwierigkeiten bieten. Die Mittel hierfür werden durch eine Verallgemeinerung der Theorie der rationalen Functionen gewonnen, welche die Uebertragung des Fundamentalsatzes von der Zerlegbarkeit ganzer rationaler Functionen in lineare Factoren auf das Gebiet der algebraischen Functionen ermöglicht. Zu diesem Ziele führt die Uebertragung derjenigen Methoden, deren sich die Zahlentheorie zu einem ähnlichen Zwecke bedient, auf die Theorie der Functionen, die ohne Weiteres möglich war. Demnach läuft auch die erste Abteilung der vorliegenden Arbeit im Wesentlichen, und soweit es in der Natur des Gegenstandes liegt, der allgemeinen Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen (ohne indessen die Kenntnis derselben beim Leser vorauszusetzen) parallel, wie sie der erste der genannten Herrn Verfasser in einem Anhange zu Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (2^{te} Aufl., ausführlicher in der 3^{ten} Aufl.) und in einem Aufsatze: „Sur la théorie des nombers entiers algébriques" in Darboux Bull. (2) I. (cf. F. d. M. IX. (1877) 126, JFM 09.0126.01) gegeben hat. Besteht zwischen den Grössen θ und z die algebraische Gleichung

$$f(\theta, z) \equiv \theta^n + b_1\theta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\theta + b_n = 0,$$

wo die b rationale Functionen von z sind, so hat das System aller rationalen Functionen von θ und z die Eigenschaft, dass es sich durch Anwendung der vier Species auf seine Individuen reproducirt, und wird deshalb als ein Körper algebraischer Functionen Ω vom Grade n bezeichnet. Jede Function ξ desselben lässt sich stets und nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$\xi = x_0 + x_1\theta + \cdots x_{n-1}\theta^{n-1},$$

wo die x rationale Fiunctionen von z sind, und umgekehrt gehören alle Functionen von dieser Form dem Köper Ω an; allgemeiner lässt sich ξ linear und homogen durch irgend n Functionen $\eta_1,\ldots,\eta_n$ (Basis) des Köpers Ω darstellen, dann und nur dann, wenn $\eta_1,\ldots,\ \eta_n$ rational unabhängig sind (ein rational irreductibles System bilden), d. h. wenn zwischen $\eta_1,\ldots,\eta_n$ keine Relation

$$y_1\eta_1 + \cdots + y_n\eta_n = 0$$

mit in z rationalen y besteht, ohne dass die y sämmtlich verschwinden. Jede Function ξ in Ω genügt einer irreductiblen Gleichung mit in z rationalen Coefficienten, deren Grad n oder ein Teiler von n ist; eine Gleichung n^{ten} Grades

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^n + a_1\xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$$

für ξ erhält man, indem man unter Zugrundelegung einer beliebigen Basis $\eta_1,\ldots,\eta_n$ das Gleichungssystem $\xi\eta_i = \sum_{\lambda=1}^n y_{i\lambda}\eta_\lambda$ aufstellt und $\eta_1,\ldots,\eta_n$ hieraus eliminirt; $N(\xi) \equiv (-1)^n b_n = \Sigma \pm y_{11}\ldots y_{nn}$ heisst die Norm von $\xi, S(\xi) \equiv b = \sum_{\lambda=1}^n b_{\lambda\lambda}$ die Spur von ξ; für Norm und Spur existiren sehr einfache Sätze; hervorgehoben sei die Beziehung $\varphi(t) = N(t-\xi)$, wo t eine willkürliche Grösse bedeutet; ferner: $\varphi(t)$ ist entwender irreductibel oder eine ganze Potenz einer irreductibeln Function. Discriminante von n Functionen $\eta_1,\ldots,\ \eta_n$ in Ω heisst die rationale Function von z:

$$\Delta(\eta_1,\ldots,\eta_n) \equiv \Sigma \pm S(\eta_1\eta_1)\ldots S(\eta_n\eta_n).$$

Ist $\eta_1,\ldots,\eta_n$ eine Basis von Ω und $\eta'_1,\ldots,\eta'_n$ irgend ein System von Functionen in Ω, so ist

$$\Delta(\eta'_1,\ldots,\eta'_n) = X^2\Delta(\eta_1,\ldots,\eta_n),$$

wo X die Determinate der η' nach den η ist;und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass η_1,...,η_n eine Basis von Ω bilden, ist, dass $\varDelta(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ nicht identisch verschwinde.

Eine Function ω in Ω heisst eine ganze Function von z, wenn in der Gleichung niedrigsten Grades, der ω genügt, $\omega^e+b_1\omega^{e-1}+\cdots+b_{e-1}\omega+b_e=0$, die b ganze rationale Functionen von z sind. Jede Function η in Ω kann durch Multiplication mit einer rationalen Function von z in eine ganze Function verwandelt werden. Das System $\mathfrak{o}$ der ganzen Functionen in $\varOmega$ reproducirt sich durch Addition, Substraction und Multiplication seiner Individuen; ω heisst durch ω' teilbar, wenn $\omega=\omega'\omega''$ ist, wo ω'' ebenfalls eine ganze Function bedeutet. Aus jeder Basis von $\varOmega$ lassen sich unzählig viele andere ableiten, deren Elemente ω_1,...,ω_n ganze Functionen von z sind; während dann $x_1\omega_1+\ldots+x_n\omega_n$ sicher eine ganze Function ist, so lange x_1,...,x_n ganze rationale Functionen von z sind, braucht nicht umgekehrt jede ganze Function in dieser Form derstellbar zu sein; damit dies aber der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass der Grad der Disciminante $\varDelta(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ ein Minimum sei, d. h. nicht grösser sei, als der irgend einer Basis, die aus lauter ganzen Functionen besteht. In diesem Fall heisst das System $\omega_1,\ldots,\omega_n$, dessen Herstellungsweise angegeben wird, eine Basis von $\mathfrak{o}$. Die Discriminante einer solchen ist von der Wahl der Basis unabhängig, wenn man noch den Coefficienten der höchsten Potenz von z durch Division mit einer Constanten $=1$ macht; darum heisst sie Discriminante des Körpers $\varOmega$:$\varDelta(\varOmega)$. Ein System $\mathfrak{a}$ von Functionen α_1,α_2,..., (in $\varOmega$) heisst ein Modul, wenn die Functionen desselben addirt, subtrahirt oder mit ganzen rationalen Functionen von z multiplicirt, wieder Functienen desselben liefern; der Modul heisst ein endlicher, wenn er sich aus einer endlichen Anzahl von Elementen $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ durch diese Operationen erzeugen lässt, und wird durch $\mathfrak{a}=[\alpha_1,\ldots,\alpha_m]$ bezeichnet, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ heisst seine Basis. Jeder endliche Modul besitzt rational irreductible Basen (alle von derselben Elementenanzahl). Ist jede Function in $\mathfrak{a}$ auch in einem zweiten Modul $\mathfrak{b}$ enthalten, so heisst $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar, $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ etc. (Der Teiler ist umfassender als das Vielfache; damit stimmt die von den Zahlen her gewohnte Anschauung, wenn man statt der Zahlen a und b die Systeme 0,$\pm a$,$\pm 2a$,..., resp. 0,$\pm b$,$\pm 2b$,... nimmt.) Alle Functionen, die in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthalten sind, bilden ebenfalls einem Modul, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; desselbe gilt für den grössten gemeinschaftlichen Teiler, d. h. den Inbegriff aller Functionen $\alpha+\beta$, wo α und β irgend welche Functionen aus $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$ sind. Unter Product von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man ferner den Inbegriff sämmtlicher Functionen $\varSigma\alpha\beta$, der selbst ein Modul ist und zwar ein endlicher, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ es sind. Es ist zwar $\mathfrak{ab}=\mathfrak{ba}$,$\mathfrak{abc}=\mathfrak{acb}=\ldots$, aber $\mathfrak{ab}$ braucht nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbar zu sein, dagegen ist, falls $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}_1$,$\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}_1$ teilbar ist, auch $\mathfrak{ab}$ durch $\mathfrak{a}_1$ $\mathfrak{b}_1$ teilbar. Endlich ist $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ der Inbegriff aller Functionen γ von der Art, dass $\gamma\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist, und ebenfalls ein Modul; $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\cdot\mathfrak{a}$ ist durch $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn auch nicht immer gleich $\mathfrak{b}$. Aus der Definition des Teilers ist klar, was unter der Congruenz $\alpha\equiv\beta$ (mod. $\mathfrak{a}$) zu verstehen ist. Hieran schliesst sich dann unmittelbar die Definition eines vollständigen Restsystems des Moduls $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$. Von Wichtigkeit ist ferner der Begriff der Norm ($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$) von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{b}$; es ist dies eine gewisse rationale, in bestimmter Weise herzustellende Function von z, welche die Eigenschaft hat, dass durch Multiplication mit ihr jede Function von $\mathfrak{b}$ in eine Function von $\mathfrak{a}$ verwandelt wird. Für die Norm wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet. Das für die vorliegende Theorie wichtigste Gebilde, das Ideal, ist eine besondere Art von Modul; ein System $\mathfrak{a}$ von ganzen Functionen von z in $\varOmega$ heisst ein Ideal, wenn 1) Summe und Differenz je zweier Functionen in $\mathfrak{a}$ wieder eine Function in $\mathfrak{a}$ ergeben, 2) das Product einer jedenFunction in $\mathfrak{a}$ mit einer jeden Function in $\mathfrak{o}$ wieder eine Function in $\mathfrak{a}$ ist. Der Modul $\mathfrak{o}$ ist selbst ein Ideal, und jedes Ideal ist durch $\mathfrak{o}$ teilbar, wie überhaupt $\mathfrak{o}$ in der Theorie der Ideale die Rolle der Einheit spielt. Bedeutet η eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$, so ist das System $\mathfrak{o}\mu$ aller durch μ teilbaren ganzen Functionen ein Ideal, welches Hauptideal heisst. Grad des Ideals $\mathfrak{a}$ heisst der Grad der ganzen rationalen Function ($\mathfrak{o}$,$\mathfrak{a}$), die kurz Norm von $\mathfrak{a}$ genannt und mit $N(\mathfrak{a})$ bezeichnet wird, dieselbe ist stets eine Function in $\mathfrak{a}$ und Teiler der Norm einer jeden Function α in $\mathfrak{a}$; $N(\mathfrak{o})=1$. Wesentlich unterscheidend für die Ideale von den allgemeinen Moduln ist der nur für Ideale geltende Satz:„Sind μ,μ_1,ν, ν_1 Functionen in o und $\mu\equiv\mu_1$ $\nu\equiv\nu_1$ (mod. $\mathfrak{a}$), so ist auch $\mu\nu\equiv\mu_1\nu_1$ (mod.$\mathfrak{o}$)." Heisst nun eine Function α in $\mathfrak{o}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar, wenn $\mathfrak{o}\alpha$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist , d. h. wenn α eine Function in $\mathfrak{o}$ ist, heissen ferner zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ relativ prim, wenn ihr grösster gemainsamer Teiler $\mathfrak{o}$ ist, und nennt man endlich $\mathfrak{p}$ ein Primideal, wenn es von $\mathfrak{o}$ verschieden istund nur $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ als Teiler hat, so lässt sich ohne Mühe eine Reihe von Sätzen über die Teilbarkeit der Ideale aufstellen, die denjenigen über die Teilberkeit der ganzen rationalen Functionen herrscht, zu beweisen, bedarf es eingehendererBetrachtungen; aus diesen ergiebt sich: ist $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar, so giebt es ein und nur ein Ideal $\mathfrak{b}$, welches der Bedingung $\mathfrak{ab}=c$ egnügt; jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Ideal ist entweder ein Primideal, oder es lässt sich, und zwar nur auf eine Weise, als Product von lauter Primidealen darstellen; ferner ist $N(\mathfrak{ab})=N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$; endlich: Primideal und Ideal ersten Grades sind identische Begriffe und überhaupt der Grad eines Ideals gleich der Anzal seiner Primfactoren. Da die Discriminante von $\varOmega$ durch das Product $\varDelta(\varOmega)=\varPi(z-c)^{n-s}$ darstellbar ist, wo alle diejenigen linearen Ausdrücke $z-c$ zu multipliciren sind, die durch die zweite oder eine höhere Potenz eines Primideals teilbar sind, und wo s die Anzahl der verschiedenen in $z-c$ aufgehenden Primideale bedeutet, so ist ersichtlich, dass es nur eine endliche Anzahl linearer Functionen $z-c$ giebt, die durch das Quadrat eines Primideals teilbar sind. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ ein solches Primideal, und ist e der Exponent der höchsten in seiner Norm aufgehenden Potenz von $\mathfrak{p}$, so heisst das über alle derartigen Primideale erstreckte Product $\Pi\mathfrak{p}^{e-1}$ das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ des Körpers Ω, das wegen seiner Wichtigkeit einer eingehenden Untersuchung unterworfen wird. Auf Grund dieser Theorie der ganzen Functionen in Ω werden nun auch die gebrochenen Functionen untersucht. Den Schluss der ersten Abteilung bildet die Behandlung der rationalen Transformationen der Functionen des Körpers Ω, aus der sich die Berechtigung ergiebt, an Stelle der unabhängigen Veränderlichen z jede beliebige Function des Körpers als unabhängige Variable der Betrachtung zu Grunde legen zu dürfen, wenn es auf die Erhaltung der Gesammtheit der Functionen des Körpers ankommt; die Begriffe: Basis, Norm, Spur, Discriminante, ganze Function, Modul, Ideal sind allerdings wesentlich abhängig von der Wahl der unabhängigen Variablen z.

Sind die soweit geführten Betrachtungen über die Functionen des Körpers Ω rein formaler Natur, d. h. bewegten sie sich überall nur im Gebiete der rationalen Rechnungsoperationen, ohne die numerischen Werte der Functionen in Betracht zu ziehen, so drängt sich nnun die Frage auf, welche an die Spitze der zweiten Abteilung gestellt wird: „In welchem Umfange ist es möglich, den Functionen in Ω solche bestimmte Zahlenwerte beizulegen, dass alle zwischen diesen Functionen bestchenden rationalen Relationen (Identitäten) in richtige Zahlengleichungen übergehen ¿‘ Zu disem Zwecke wird folgende, zunächst ganz abstrakte Definition aufgestellt: Wenn alle Individuen α,β,... des Körpers Ω durch bestimmte Zahlenwerte α_0,β_0,... so ersetzt werden, dass (I.) $\alpha_0 = \alpha$, falls α eine Constante ist, und allgemein

$$(II.)\quad (\alpha+\beta)_0 = \alpha_0 + \beta_0, \quad (III.)\quad (\alpha-\beta)_0 = \alpha_0 - \beta_0,$$

$$(IV.)\quad (\alpha.\beta)_0 = \alpha_0.\beta_0, \quad (V.)\quad (\frac{\alpha}{\beta})_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

wird, so soll einem solchen Zusammentreffen bestimmter Werte ein „Punkt“ P zugeordnet werden, und wir sagen, in P sei $\alpha = \alpha_0$, oder α habe in Pden Wert α_0. Zwei Punkte heissen stets und nur dann verschieden, wenn eine Function α in Ω existirt, die in beiden Punkten verschiedene Werte hat. Es sind nun die Primideale, die den Uebergang von dieser Definition des Punktes zum Nachweise seiner Existenz vermitteln. Ist nämlich z irgend eine in P endliche Variable, so ist der Inbegriff $\mathfrak{p}$ aller derjenigen ganzen Functionen von z, welche in P verschwinden, ein Primideal in z, das vom Punkte P erzeugte Primideal $\mathfrak{p}$; da jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in z stets durch einem, und nur durch einen Punkt P, den Nullpunkt von $\mathfrak{p}$, erzeugt werden kann, so ergiebt sich der Weg, um alle existirenden Punkte P und jeden nur ein einziges Mal zu erhalten, deren Inbegriff die Riemann'sche Fläche T bildet, von selbst. Dies ist die Grundlage, auf der dann mit Hülfe der Ergebnisse der ersten Abteilung eine Theorie der algebraischen Functionen entwickelt wird. Eine ganz formale Definition des Differentialquotienten führt zu der Geschlechtszahl, und zu einer allgemeinen Darstellung der Differentiale erster Gattung. Hieran schliesst sich der Beweis des Riemann-Roch'schen Satzes über die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer durch ihre Unendlichkeitspunkte bestimmten Function und die Theorie der Differentiale zweiter und dritter Gattung.

Reviewer: Toeplitz, Dr. (Breslau)

MSC:

14H05	Algebraic functions and function fields in algebraic geometry
11R58	Arithmetic theory of algebraic function fields
30F99	Riemann surfaces

Keywords:

algebraic functions; algebraic number fields

Full Text: Crelle EuDML