Haentzschel, E.

Ueber die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Beitrag zur Theorie der Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung. (German) JFM 15.0311.01

Diss. Jena (1883).

Zunächst wird die Reduction der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

für den Fall, dass diese Gleichung für den inneren oder äusseren Raum eines Rotationskörpers gilt, auf gewöhnliche Differentialgleichungen nach dem Vorgange des Herrn Wangerin (Berl. Monatsber. 1878, cf. F. d. M. X. S. 663 f., JFM 10.0663.03) ausgeführt. Dieselben subsumiren sich unter die Form

$$(1)\quad \frac{d^2y}{du^2}=\{(m^2-\tfrac{1}{4})\wp u-h\}\cdot y.$$

Dieser "doppelt periodischen Normalform" wird, indem durch die Gleichung $\wp u = s$ die Variable s als unabhängige eingeführt wird, die "algebraische Normalform"

$$(2)\quad (4s^3-g_2s-g_3)\frac{d^2y}{ds^2}+(6s^2-\frac{1}{2}g_2)\frac{dy}{ds}+\{(m^2-\frac{1}{4})s-h\}\cdot y=0$$

an die Seite gestellt; die Functionen y sind in der Heine'schen Bezeichnung solche Lamé'sche Functionen zweiter Ordnung, deren Zahlenindex die Hälfte einer ungeraden Zahl ist. Die Bezeichnung dieser Gleichungen als Normalformen wird durch Ueberführung einiger Differentialgleichungen (z. B. der von Hermite C. R. t. 85 ff. behandelten) in diese Form gerechtfertigt. Sodann wird gezeigt, wie die Weierstrass'sche Theorie der elliptischen Functionen einen streng functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen sehr einfach nachzuweisen gestattet. Gleichzeitig wird im Gegensatz zu § 3 von Heine's Handbuch darauf aufmerksam gemacht, dass einerseits die Functionen des elliptischen Cylinders ganz ausserhalb dieses Functionengebietes stehen, andererseits der Mebler'sche Uebergang von den Kugel- zu den Bessel'schen Functionen ein Element in sich birgt, welches seine Anwendung wesentlich beeinträchtigt. Sehr einfach wird die Frage beantwortet, wann das Potential eines Rotationskörpers durch Lamé'sche, wann durch Laplace'sche, wann durch Bessel'sche Functionen bestimmt wird.

Der darauf folgende Hauptteil der Arbeit liefert im Anschluss an die von Fuchs, Hermite, Mittag-Leffler und Picard angewendeten Methoden Beiträge zur Kenntnis der durch die obige Differentialgleichung definirten Functionen. Nach einem Ueberblick über die Natur der Integrale von (2) geht der Verfasser auf die Arbeit von Brioschi (Ann. di Mat. IX. und X.) ein, die sich mit derselben Differentialgleichung beschäftigt, und zeigt, dass derselbe sich im Irrtum befindet, wenn er die von ihm aufgestellten algebraischen Integrale von (2) als die vollständige Lösung der Gleichung ansieht, indem er die Nebenbedingungen, welche sich an das von ihm gegebene Integral knüpfen, nicht erkannt hat; Herr Brioschi hat die Gleichung (2) in der That nur für den Fall integrirt, dass die Integrale derselben algebraische Functionen von $s = \wp u$, also gewöhnliche doppelt-periodische Functionen von u sind, während sie im allgemeinen doppelt-periodische Functionen zweiter Gattung sind.

Einige Erörterungen in Betreff des Umstandes, dass das in der Differentialgleichung auftretende m^2 sowohl aus $+m$, als aus $-m$ entsprungen sein kann, und die Untersuchung zweier Grenzfälle bilden den Schluss.

Reviewer: Toeplitz, Dr. (Breslau)