Hurwitz, A.

Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique.

(French) JFM 21.0319.02
Ann. de l'Éc. Norm. (3) VI, 327-332 (1889).

Berichtigung eines von Herrn G. Teixeira in den Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV. (F. d. M. XIX. 1887. 291, JFM 19.0291.01) aufgestellten Theorems, nach welchem eine Reihe

$$y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$$

(a_λ ein auf kleinste Benennung gebrachter Bruch) nicht Integral einer algebraischen Differentialgleichung mit ganzzahligen Coefficienten sein sollte, wenn die Nenner von $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ ohne Ende Primfactoren enthalten, die resp. grösser sind als $n+1, n+2, \dots$ u. s. f.

Herr Hurwitz zeigt an dem Beispiel der Function

$$y=\tfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}\right)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{x^\lambda}{(2\lambda)!}$$

die Ungültigkeit des Theorems und beweist, dass es durch das folgende zu ersetzen ist:

"Wenn die Reihe mit rationalen Coefficienten

$$y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$$

einer algebraischen Differentialgleichung genügt, so giebt es eine ganze ganzzahlige Function

$$\gamma(z)=\gamma_0+\gamma_1 z+\dots+\gamma_\nu z^\nu$$

und eine ganze Zahl n von der Beschaffenheit, dass die Primzahlfactoren der Nenner in den reducirten Brüchen $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ resp. in

$$\gamma(n),\ \gamma(n).\gamma(n+1),\ \gamma(n).\gamma(n+1).\gamma(n+2), \dots$$

enthalten sind. Die Zahlen $\gamma(n), \gamma(n+1), \dots$ sind alle von Null verschieden."

Mit Hülfe dieses Theorems, das man als eine Verallgemeinerung des Eisenstein'schen Satzes bezeichnen kann, gelingt es leicht, Functionen herzustellen, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen. Der Herr Verfasser giebt folgendes Beispiel:

$$y=1+x+\frac{x^2}{4!}+\dots+\frac{x^n}{(n^n)!}+\cdots.$$

Reviewer: Günther, P., Dr. (Berlin)

Full Text: DOI Numdam EuDML