Schröder, Ernst

Vorlesungen über die Algebra der Logik. (Exacte Logik). I. (German) JFM 22.0073.02

Leipzig. B. G. Teubner. XII u. 717 S. 8° (1890).

Durch das vorliegende Werk löst der Verfasser das im Vorwort zu seinem "Operationskreis des Logikkalküls" gegebene Versprechen ein, eine ausführliche Darstellung jener bedeutsamen Untersuchungen zu geben, durch welche die Logik zum Range einer exacten Wissenschaft erhoben worden ist. Mit recht darf der Verfasser seiner Arbeit heute diesen stolzen Titel voransetzen; denn während damals (1877) in den einschlägigen Werken von Boole und R. Grassmann nur erst die kaum beachteten Grundlagen der mathematischen Logik vorhanden waren, wird uns hier ein Handbuch geboten, welches, indem es die eigenen bahnbrechenden Untersuchungen des Verfassers und die Leistungen zahlreicher anderer Autoren zu einem einheitlichen System zusammenfasst, bereits das Bild einer nach den verschiedensten Richtungen hin ausgebauten Wissenschaft gewährt. Und bei aller Anerkennung der Verdienste, welche sich moderne Forscher wie Trendelenburg , Drobisch, Wundt um die Logik erworben haben, zeigt sich jetzt doch, dass es erst der mathematischen Behandlung vorbehalten war, den von Alters her auf ihr lastenden Bann der Stagnation zu brechen und ihr Gebiet in ungeahntem Masse zu erweitern und zu vertiefen. – Wenn der Verf. sich mit seinem Werk vermittelnd an die Mathematiker und Philosophen wendet, so haben wir gegenwärtig um so mehr Grund, diesem Streben Erfolg zu wünschen, je lebhafter sich die Philosophie gegen die Fortschritte wehrt, welche ihr von der Mathematik hinsichtlich des Raumbegriffes aufgenötigt werden. Aber auch für vergleichende Sprachwissenschaft erwachsen aus den zahlreichen neuen Gesichtspunkten, welche sich jetzt eröffnen, anziehende und lehrreiche Probleme. Vor allem dürfte hier nach Ansicht des Ref. zum ersten Male der wissenschaftliche Boden gewonnen sein für eine Abwägung der logischen Vorzüge zweier Sprachen gegen einander. Doch dies nur nebenbei.

Wenden wir uns nun zu den Einzelheiten des Inhalts. Eine umfangreiche Einleitung enthält Vorbetrachtungen über Thatsachen und Aufgaben des Denkens, über Zeichen und Namen und über die Grundbegriffe der Logik. Schon hier, wie auch im weiteren Verlaufe der Darstellung, wird ein über Erwarten umfangreiches Gebiet täglicher Erfahrungen im Denken und Sprechen in Anspruch genommen, um Beispiele zu liefern für Fragen und Unklarheiten, zu deren Lösung die Logik berufen ist. Es ist ein Gegenstand besonderer Sorgfalt des Verfassers gewesen, hierdurch den trockenen Stoff in anziehender Weise zu beleben und uns gleichzeitig die Wissenschaft in ihrer neuen Gestalt als eine eminent praktische vor Augen zu führen.

Der in 14 Vorlesungen gegliederte Stoff des vorliegenden ersten Bandes erstreckt sich im wesentlichen über Inhalt und Umfang von Begriffen und die darauf bezüglichen Urteile ("Gebietekalkül" im Gegensatz zu dem im zweiten Bande behandelten "Aussagenkalkül"). Von fundamentaler Bedeutung ist die Operation der "Einordnung" (Subsumtion), die einzige, welche ein neues Zeichen erfordert. So ist z. B. der Begriff Gold (a) eingeordnet dem Begriffe Metall (b). In Zeichen ausgedrückt:

$$a \overset{(}{=} b.$$

Formell betrachtet, kommt der ganze Logikkalkül, so weit er hier dargestellt ist, zu Stande durch consequente Durchführung des Unterschiedes zwischen den beiden Zeichen der Einordnung und Gleichheit. Verschiedene mathematische Anwendungen, z. B. auf mehrdeutige Zahlenausdrücke, ergeben sich unmittelbar. Vor allem aber gründen sich auf die Unterscheidung von Subsumtion und Gleichheit wesentliche Unterschiede der einfachen Urteile nach Inhalt und Form. Die Mehrdeutigkeit vieler sprachlichen Urteile tritt in helles Licht, und die Logik löst hier die Aufgabe, die verschiedenen Deutungen zu sondern. Veranschaulicht wird die Subsumtion durch die Euler'schen Diagramme.

Grundlage der mathematischen Logik ist der "identische Kalkül". Aus einer Mannigfaltigkeit beliebiger Elemente (z. B. Punkte einer ebenen Tafel) werden irgend welche Zusammenstellungen von Elementen (z. B. Figuren) herausgenommen, "Gebiete" genannt und durch Buchstaben bezeichnet. Mit diesen Buchstaben rechnet der identische Kalkül. Dieselben können aber nicht nur stetige, aus Elementen gebildete Gebiete darstellen, sondern auch discrete, aus Individuen gebildete "Klassen", ferner Begriffe, Urteile, Schlüsse, Gleichungen, Kalküle, Gruppen u. s. w. Hierdurch erlangt der identische Kalkül seine universale Anwendungsfähigkeit. – An der Spitze des Kalküls stehen die beiden Principien: $a \overset{(}{=} a$, und: Wenn $a \overset{(}{=} b$ und $b \overset{(}{=} c$, so ist auch $a \overset{(}{=} c$. Die Null bedeutet ein Gebiet, welches jedem Gebiete, und die Eins ein Gebiet, welchem jedes Gebiet eingeordnet ist. – Die Rechnungsarten des identischen Kalküls sind: Multiplication, Addition (mit den Eigenschaften der gleichen arithmetischen Rechnungen) und Negation (in welchen Specialfall die in ihrer Allgemeinheit überflüssigen Rechnungen der Substraction und Division zusammenfliessen). Zur Erklärung von Product und Summe dienen die Sätze:

Wenn $c \overset{(}{=} a$ und $c \overset{(}{=} b$, so gilt: $c \overset{(}{=} ab$.

Wenn $a \overset{(}{=} c$ und $b \overset{(}{=} c$, so gilt: $a + b \overset{(}{=} c$.

Hiermit ist das Product als Prädicat, die Summe als Subject definirt. Ferner ist ab das zwei Gebieten a und b gemeinsame Gebiet, $a + b$ dasjenige, zu welchem sie sich gegenseitig ergänzen. Sind a und b Zahlen, so entspricht ab dem grössten gemeinsamen Factor, $a + b$ dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen. – Die weitere Discussion dieser Rechnungen und der für sie geltenden Theoreme liefert Material zur Aufdeckung einer Reihe gewohnter Nachlässigkeiten im Gebrauch der Sprache. Excurse wie derjenige über die Mehrdeutigkeit des Wortes "oder" in den modernen Sprachen gegenüber der exacten Unterscheidung, welche hier die lateinische Sprache trifft, dürften geeignet sein, so manchen Fanatiker der modernen antiklassischen Richtung zu ernüchtern. – Weiter sind hervorrzuheben die Tautologiegesetze $a + a = a$ und $a \cdot a = a$. Merkwürdigerwise zeigt sich das Distributivgesetz in der Form $a(b + c) \overset{(}{=} ab + ac$ als unbeweisbar. Es wird als Princip aufgestellt, welches für den identischen Kalkül Geltung hat, nicht aber für den "logischen Kalkül mit Gruppen" (z. B. von Functionalgleichungen, Algorithmen oder Kalkülen).

Ein weiterer Abschnitt ist den Regeln der Negation gewidmet. Hier finden auch der Satz des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Dritten und die logischen Einteilungen ihre Stelle. Ein dualistisches Princip gilt hinsichtlich der Zeichen 0 und 1, mal und plus, sowie derjenigen für Ueber- und Unterordnung. – Die Functionstheorie gründet sich auf die Sätze: Jedes Gebiet y lässt sich durch jedes andere Gebiet x und dessen Negation linear und homogen aysdrücken. Jede Function von x lässt sich als lineare Function von x darstellen. – Auf den Unterschied zwischen Gleichungen und Formeln, zwischen speciellen und allgemeinen Bedeutugen der Buchstaben gründet sich nun auch die Klassification der Urteile (Propositionen) einerseits in synthetische und analytische, andererseits in specielle und allgemeine. Das analytische Urteil sagt Selbstverständliches aus und stellt, wenn es allgemein ist, Gesetze des Denkens dar, innerhalb deren eine Umformung gegebener Ausdrucksweisen gestattet ist. Das synthetische Urteil giebt neue Aufschlüsse über die Klassen oder Gebiete, von denen es handelt. Sofern es Allgemein und nicht etwa absurd ist, lässt es sich durch Einsetzen gewisser specieller Bedeutungen (Wurzeln) an Stelle der allgemeinen in ein richtiges specielles Urteil verwandeln. Beiläuftig erweisen sich hier die Wahrheiten der Mathematik, wenn sie Zahlen betreffen, als analytische, die der Geometrie dagegen als synthetische. Hierdurch bestätigt sich auch die Grassmann'sche Auffassung der Geometrie als einer angewandten Wissenschaft. Es folgen nun die Auflösungen der Propositionen (Gleichungen) und die damit zusammenhängenden Eliminationen, wobei die Abweichungen des logischen Kalküls vom algebraischen sich mehr geltend machen als vorher.

Dem vorstehend skizzirten Gange der Hauptuntersuchung schliesst sich, in Form von Zwischenbetrachtungen oder Anhängen, noch allerlei dankenswertes Beiwerk an. Wiederholt setzt der Verfasser ausführlich auseinander, warum er diesen und nicht einen anderen Weg einschlägt, rechtfertigt nachträglich sein Vorgehen, weist Wege, deren Vernachlässigung dem Leser auffallen muss, als überflüssig oder unfruchtbar zurück, wird den abweichenden Darstellungen desselben Gegenstandes bei fremden Autoren gerecht und giebt ein reiches Material von Anwendungen und von teilweise ausführlich gelösten Aufgaben. Dieses Material ist geeignet, die Ueberlegenheit der rechnenden Methode gegenüber der bisherigen schulmässigen, verbalen Ueberlegungsweise in überzeugender Weise darzuthun. Die Anhänge geben weiteres Detail über Multiplication und Addition und verbreiten sich ausfürlich über den oben erwähnten logischen Kalkül mit Gruppen.

Unser Urteil zusammenfassend, müssen wir sagen, dass der allgemeine Charakter der mathematischen Behandlung für die Wissenschaft der Logik die Möglichkeit einer fruchtbaren Weiterentwickelung geschaffen hat, dass ferner die Schärfe der mathematischen Behandlung, welche die feinsten Unterschiede im Denken zum Ausdruck bringt, den Wert dieser Wissenschaft für die Schärfe und Klarheit des Denkes schon in ihren hier erst vorliegenden Elementen ganz erheblich gesteigert hat, und dass hier die ersten selbständigen, verheissungsvollen Schritte einen bisher von der Philosophie am Gängelbande geführten Wissenschaft vorliegen. – Dass es dem Verfasser gelungen ist, in einer überall leicht verständlichen und nirgends langweilenden weise ein Handbuch der mathematischen Logik herzustellen, gereicht nicht weniger dem Gegenstande zur Empfehlung wie ihm selbst zum Verdienst. Litteraturverzeichnis und Namenregister beschliessen den stattlichen Teubner-Band. Durch die in den Math. Ann. enthaltene Bemerkung wird eine, Miss Ladd betreffende, Litteraturangabe nachgeholt.

Reviewer: Schlegel, Prof. (Hagen)