zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Kötter, F.

Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. (German) JFM 23.0977.01

Berl. Ber. 1891, 47-56 (1891); J. für Math. CIX, 51-81, 89-111 (1891).

Bewegt sich ein fester Körper, auf den keine äusseren Kräfte wirken, in einer incompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit, deren Gebiet einfach zusammenhängend ist und sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt; ist ferner der Anfangszustand wirbelfrei, und ruht die Flüssigkeit im Unendlichen; besitzen endlich die auf die Flüssigkeit wirkenden äusseren Kräfte ein Potential; so lassen sich mittels des Hamilton'schen Princips die Differentialgleichungen, von denen die Bewegung des Körpers abhängt, aufstellen, ohne dass der eigentlich hydrodynamische Teil des Problems gelöst zu werden braucht. Einfache Fälle derartiger Bewegungen sind zuerst von Thomson und Tait (Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Uebersetzung, 1. Aufl. 1871, I § 331-332) behandelt. Ferner hat Kirchhoff [J. für M. LXXI, F. d. M. II. 1869-1870. 731, JFM 02.0731.01; vgl. Kirchhoff's Mechanik, Vorl. 19] jene Gleichungen für den Fall eines Rotationskörpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken, integrirt. Zugleich hat Kirchhoff den allgemeinen Gleichungen eine sehr elegante Form gegeben. Durch eine Transformation der Kirchoff'schen Gleichungen gelang es sodann Clebsch [Math. Ann. III., F. d. M. II. 1869-1870. 733, JFM 02.0733.01], drei neue integrable Fälle des in Rede stehenden Problemszu finden, von denen einer directe Erweiterung des Kirchoff'schen Falles ist, während von den beiden übrigen der eine in dem letzten als Specialfall enthalten ist. Auch in diesem allgemeinsten Falle wirken auf den Körper keine äusseren Kräfte.

Clebsch hat die Aufgabe nur soweit verfolgt, dass er die Lösung auf Quadraturen zurückführte. Später hat Herr Weber [Math. Ann. XIV, F. d. M. X. 1878. 643, JFM 10.0643.01] unter der Voraussetzung, dass der den Körper in Bewegung setzende Impuls sich auf eine Einzelkraft reducirt, sämtliche für die Bewegung in dem allgemeinsten Clebsch'schen Falle in Betracht kommenden Grössen durch Thetafunctionen zweier Veränderlichen dargestellt, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind. Es war dies ein Resultat, das sich aus den Clebsch'schen Formeln nicht ohne weiteres ableiten liess. Sagt doch Clebsch selbst, dass die Umformung seines fünften Integrals (das Integral für die Zeit hat er nicht explicit aufgestellt) mit grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein scheine.

Für den complicirteren Fall, wo das impulsive Kraftsystem aus einer Einzelkraft und einem Kräftepaar besteht, stand eine der Weber'schen analoge Darstellung bisher noch aus. Diese Lücke wird durch die vorliegenden Arbeit, deren erste nur ein Auszug aus der ausführlicheren zweiten ist, ausgefüllt; und damit erst kann das allgemeine Clebsch'sche Problem als völlig durchgeführt angesehen werden. Bemerkenswert ist, dass auch hier zur Darstellung der Bewegung nur Thetafunctionen zweier Veränderlichen erforderlich sind.

Um den Gedankengang des Herrn Kötter zu verstehen, ist es notwendig, auf das Clebsch'sche Problem näher einzugehen. Bei demselben wird angenommen, dass die Gestalt und Massenverteilung des sich bewegenden Körpers, auf den keine äusseren Kräfte wirken, eine derartige ist, dass die lebendige Kraft T derselben sich durch einen Ausdruck von der Form

$$(1)\quad 2T=\frac{u^2}{a_1}+\frac{v^2}{a_2}+\frac{w^2}{a_3}+\frac{p^2}{b_1}+\frac{q^2}{b_2}+\frac{r^2}{b_3}$$

darstellen lässt, mit der beschränkenden Nebenbedingung, dass zwischen den Constanten die Gleichung

$$(2)\quad a_1\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+a_2\left(\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_1}\right)+a_3\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)=0$$

besteht. Darin sind u,v,w die Geschwindigkeitscomponenten X,Y,Z des Anfangspunktes O eines im Körper festen Coordinatensystems in Bezug auf diese Axen; p,q,r sind die Rotationsgeschwindigkeiten des Körpers nach denselben Axen. Für die obige Form von T haben die sechs zwischen u,v,w,p,q,r bestehenden Differentialgleichungen (über diese vergl. Kirchhoff's Mechanik, Vorl. 19, § 2) ausser den drei Integralen, die man von vorne herein kennt, noch ein viertes von der Form: eine quadratische Function von u,v,w,p,q,r ist gleich einer Constante. Ein fünftes Integral, das aber im folgenden keine Rolle spielt, findet Clebsch durch das Princip des letzten Multiplicators. Das erwähnte vierte Integral ermittelt

Clebsch, indem er an Stelle der u, v, w, p, q, r die folgenden Unbekannten einführt:

$$(3) \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial T}{\partial u}, & x_2 = \frac{\partial T}{\partial v}, & x_3 = \frac{\partial T}{\partial w}, \\ y_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, & y_2 = \frac{\partial T}{\partial q}, & y_3 = \frac{\partial T}{\partial r}. \end{cases}$$

(Es sind dies die Componenten und Drehungsmomente des Impulses, der die momentane Bewegung hervorbringen würde, bezüglich der im Körper festen Axen.) Dadurch nehmen die von Kirchhoff aufgestellten Bewegungsgleichungen die Form an:

$$(4) \quad \frac{dx_1}{dt} = b_2y_2x_3 - b_3y_3x_2, \quad \frac{dy_1}{dt} = y_2y_3(b_2 - b_3) + x_2x_3(a_2 - a_3),$$

zu denen noch vier andere kommen, die aus den hingeschriebenen durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen. Vier Integrale dieser Gleichungen sind

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = J^2, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = JJ_1, \\ a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2 = L, \\ -(a_2a_3x_1^2 + a_3a_1x_2^2 + a_1a_2x_3^2) + b_1a_1y_1^2 + b_2a_2y_2^2 + b_3a_3y_3^2 = L_1. \end{cases}$$

Das vierte Integral ist das von Clebsch gefundene; dasselbe ergiebt sich mittels der Relation (2). J ist die Einzelkraft des den Körper in Bewegung setzenden Impulses, J_1 das Drehungsmoment des Kräftepaares jenes Impulses.

An diese Resultate, die er in selbständiger Darstellung reproducirt, knüpft Herr Kötter seine eigenen Erörterungen an. Die erste Aufgabe besteht darin, die sechs Grössen $x_1, \dots, y_3$, zwischen denen die vier Gleichungen (5) bestehen, durch zwei neue Grössen auszudrücken. Es genügt, die Aufgabe für den Specialfall $b_1 = b_2 = b_3$ zu lösen, da sich der allgemeine Fall durch Einführung neuer Constanten an Stalle der a, b auf jenen Specialfall zurückführen lässt. Unter der Voraussetzung $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ werden nun an Stelle der Grössen $x_\alpha, y_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ die folgenden linearen Verbindungen derselben betrachtet:

$$(6) \qquad \begin{cases} \left.\begin{matrix}\xi_\alpha \\ \eta_\alpha\end{matrix}\right\} = x_\alpha \left(\frac{\sqrt{(s_1-a_1)(s_1-a_2)s_1-a_3)}}{\sqrt{s_1-a_\alpha}\sqrt{\psi'(s_1)}} \right. \\ \qquad \left. \pm i \, \frac{\sqrt{(s_2-a_1)(s_2-a_2)(s_2-a_3)}}{\sqrt{s_2-a_\alpha}\,\sqrt{\psi'(s_2)}} \right) \\ \qquad + y_\alpha \left(\frac{\sqrt{s_1-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} \pm i \, \frac{\sqrt{s_2-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right). \end{cases}$$

Darin ist

$$\psi(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4).$$

Die oberen Zeichen beziehen sich auf ξ, die unteren auf η. Die durch (6) definirten Grössen ξ, η genügen nun folgenden drei Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} \Sigma\xi_\alpha^2 + \Sigma\eta_\alpha^2 = 0, \\ \Sigma\xi_\alpha\eta_\alpha = 0, & (\alpha = 1, 2, 3) \\ \Sigma d_\alpha^2\xi_\alpha^2 + \Sigma \frac{\eta_\alpha^2}{d_\alpha^2} = 0, \end{cases}$$

wo

$$(7^{\mathrm{a}}) \qquad d_\alpha = \frac{\frac{\sqrt{s_3-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i \frac{\sqrt{s_4-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{\sqrt{s_1-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i \frac{\sqrt{s_2-a_\alpha}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

ist. In Folge der Gleichungen (7) lassen sich die sechs Grössen ξ_α, η_α als Producte eines allen gemeinsamen Factors S und je einer hyperelliptischen Function des Wertepaares s_1, s_2 darstellen. Indem man dann irgend eine der Gleichungen (5) oder besser noch eine in gewisser Weise von einem willkürlichen Parameter abhängende Combination dieser Gleichungen benutzt, erhält man auch S durch hyperelliptische Functionen von s_1 und s_2 dargestellt. Damit sind auch die x_α, y_α durch hyperelliptische Functionen ausgedrückt. Geht man dann von diesen zu den Thetafunctionen zweier Veränderlichen über und setzt die so erhaltenen Ausdrücke in die Differentialgleichungen (4) ein, so ergeben sich die Argumente der

Thetafunctionen als lineare Functionen der Zeit.

Da es zu weit führen würde, auf weitere Einzelheiten der sehr umfangreichen Entwickelungen einzugehen, müssen wir uns mit obiger Darlegung des Gedankenganges der Arbeit wie ihres Zusammenhanges mit früheren Arbeiten begnügen. Hinsichtlich der schliesslichen Resultate sei noch Folgendes erwähnt. Die Thetafunctionen werden genau so definirt, wie es Frau von Kowalevski in ihrer Abhandlung über die Rotation (Acta Math. Bd. XII, F. d. M. XXI. 1889. 935, JFM 21.0935.01) im Anschluss an die Untersuchungen des Herrn Königsberger gethan hat. Die Grössen $x_1 = \frac{\partial T}{\partial u}$, $y_1 = \frac{\partial T}{\partial p}$, ... lassen sich als Brüche mit gemeinschaftlichem Nenner darstellen; und zwar setzt sich letzterer linear aus zwei Thetafunctionen zusammen. Die beiden Argumente jeder der Thetafunctionen sind lineare Functionen der Zeit. Die Zähler der genannten Ausdrücke unterscheiden sich von dem gemeinsamen Nenner nur dadurch, dass an Stelle der Thetafunctionen andere Thetafunctionen treten und auch die constanten Factoren andere Werte annehmen. Eine analoge Darstellung mit demselben Nenner ergiebt sich auch für u, v, w, p, q, r. Weiter werden auch die Richtungscosinus der im Körper festen gegen die im Raume festen Axen durch Thetafunctionen ausgedrückt. Der Nenner der neun Richtungscosinus ist genau derselbe wie in den Ausdrücken für $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial p}, u, p$, etc. Von den Zählern der Richtungscosinus enthalten jedoch nur die drei zwischen der Axe des Impulses und den drei im Körper festen Axen Thetafunctionen mit denselben Argumenten wie im Nenner, während die in den Zählern der sechs übrigen Richtungscosinus auftretenden Thetafunctionen Argumente besitzen, die aus den vorher genannten Argumenten durch Addition und Subtraction eines gewissen Constantenpaares entstehen. Endlich werden auch die Coordinaten des Anfangspunktes des im Körper festen Axensystems ermittelt. Die Ausdrücke für diese haben analoge Formen wie die für die Richtungscosinus, nur dass bei der dem Anfangsimpulse parallelen Axe noch ein Zeit proportionales additives Glied hinzutritt, bei den beiden anderen Coordinaten ein Factor, der eine einfach periodische Function der Zeit ist.

Reviewer: Wangerin, Prof. (Halle a. Saale)

Full Text: Crelle EuDML