Clebsch, Alfred

Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch. Zweiten Bandes erster Teil. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. (German) JFM 23.0703.01

Leipzig. B. G. Teubner. VIII+650 S. gr. 8° (1891).

Der vorliegende Band ist die Fortsetzung des im Jahre 1875 in demselben Verlage erschienenen Werkes: A. Clebsch, Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. Ref. F. d. M. VIII. 1876. 421 (siehe JFM 08.0421.01). Die Veränderung des Titels entspricht dem Umstande, dass noch mehr, als bereits im ersten Bande, die selbständigen Untersuchungen und Ausführungen des Verfassers gegenüber dem von Clebsch herrührenden Material in den Vordergrund getreten sind. Und dies gereicht dem ganzen Werke nur zum Nutzen, da wir so auch die Resultate der neueren geometrischen Forschungen in demselben niedergelegt finden, während andererseits in der Vorrede und in den litterarischen Anmerkungen hinlänglich angegeben ist, welche Abschnitte speciell von Clebsch herrühren. Das Werk, sowie es jetzt vorliegt, vereinigt grosse Vorzüge in sich, wie man sie selten beisammen findet. Es ist ausgezeichnet durch strenge begriffliche Durcharbeitung, die keiner Schwierigkeit aus dem Wege geht und bis auf die philosophischen Grundlagen des mathematischen Erkennens zurückgreift; dann durch die Fülle des gebotenen Stoffes, ferner durch pädagogisch geschickte Anordnung und Entwickelung, wie durch eine schlichte Darstellung, die immer den Punkt, auf den es gerade ankommt, scharf hervorzuheben weiss, und endlich auch durch grosse Gewissenhaftigkeit in litterarischen Bemerkungen und Quellenangaben, die sich bis auf die anderen Werken entlehnten Figuren erstreckt.

Der Inhalt ist in drei Abteilungen von bezw. 8, 21 und 13 Capitel geteilt.

Die erste Abteilung, Seite 1-130, behandelt: Punkt, Ebene und Gerade. Nach Einführung rechtwinkliger Coordinaten, des Richtungswinkels und des Vectors werden zwei Punkte betrachtet, und die Gleichungen

$$x_1 - x_2 = r \cos \alpha \text{ und die analogen}$$

führen sofort zur Aufstellung der Gleichungen einer Geraden und der "Parameterdarstellung" und weiter auch zur Gleichung der Kugel und zu ihrer Parameterdarstellung. Hieran wird die Auseinandersetzung der Methoden zur analytischen Behandlung von Curven und von Flächen überhaupt geknüpft. Hierauf wird der Winkel zweier Richtungen, der kürzeste Abstand zweier Geraden bestimmt und dann die Gleichung der Ebene aufgestellt und schliesslich in die Form

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

gebracht, aus welcher sofort das Princip der Dualität gewonnen wird, das nun gleich genauer ins Auge gefasst wird, um später als bereites Hülfsmittel bei den folgenden Untersuchungen zu dienen. Daran schliesst sich die Betrachtung der projectivischen Gebilde und ihrer Erzeugnisse, dann die Grundlage der Liniengeometrie, der lineare Complex, Systeme von 2 oder 3 solchen Complexen; die Transformation der rechtwinkligen Coordinaten und die Einführung homogener Coordinaten. Den Schluss des ersten Abschnittes bildet die Betrachtung der imaginären Elemente in der v. Staudt'schen Darstellung, wodurch der vollständige geometrische Sinn imaginärer Punkte, Ebenen, gerader Linien und der Doppelverhältnisse aus solchen Elementen klargelegt wird.

Es ist somit in der ersten Abteilung eine sichere Grundlage für die weiteren Untersuchungen geschaffen.

Die zweite Abteilung behandelt (Seite 131-432) in sehr erschöpfender Weise die Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, ausgehend von der allgemeinsten Gleichung in homogenen Coordinaten. Es wird zunächst die Polarentheorie behandelt und die Fläche auf ein conjugirtes Tetraeder bezogen; dann wird die Erzeugung der Fläche durch (reelle oder imaginäre) Gerade besprochen, und es werden die Flächen mit verschwindender Determinante, also im allgemeinen Kegel, betrachtet. Hierauf wird die Beziehung der Fläche zur unendlich entfernten Ebene untersucht, wobei sich die Lehre von den conjugirten Durchmessern ergiebt. Daran schliesst sich das Hauptaxenproblem und die Untersuchung der Paraboloide. Es folgt die Betrachtung der Umdrehungsflächen und die der sechs Systeme von Kreisschnitten der allgemeinen

Fläche. Dann werden durch das Dualitätsprincip aus den bisherigen Betrachtungen die entsprechenden Resultate abgeleitet. Hierauf wird die gegenseitige Lage zweier Flächen zweiter Ordnung behandelt, wobei die Raumcurve vierter Ordnung und erster Art und diejenige dritter Ordnung untersucht werden, und nachdem wieder der Uebergang zu den dualistisch entsprechenden Eigenschaften vollzogen ist, werden die confocalen Systeme eingehend behandelt. Nach Einführung der gewöhnlichen und der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten folgt die Untersuchung der Krümmungslinien und der geodätischen Linien. Dann werden die Beziehungen linearer Complexe zu Flächen zweiter Ordnung und lineare Transformationen der Flächen in sich, gewisse lineare Transformationen des Raumes, solche eines linearen Complexes in sich, dualistische lineare Transformationen eines linearen Complexes in sich und die allgemeinen reciproken Verwandtschaften betrachtet. Den Schluss der Abteilung bildet die Untersuchung der eindeutigen Abbildung einer Fläche zweiter Ordnung auf die Ebene, wobei die allgemeinen Gesetze derartiger Abbildungen zu Sprache kommen. Hierbei werden auch die Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Klasse besprochen. Auch wird die stereographische Projection eingehend behandelt.

Ganz besonders interessant ist nun die dritte Abteilung, Seite 433-637, enthaltend die Grundbegriffe der projectivischen und der metrischen Geometrie.

Es waren in den beiden ersten Abteilungen schon immer die projectivischen Eigenschaften der Gebilde gegenüber den metrischen bevorzugt und die letzteren meist aus den ersteren abgeleitet worden. Gleichwohl war die ganze Grundlage der Untersuchung metrisch gewesen; denn die homogenen Coordinaten waren aus den rechtwinkligen abgeleitet, und der Begriff des Doppelverhältnisses beruhte auf metrischen Bestimmungen. Es macht sich nun das Bedürfnis geltend, zu untersuchen, wie weit es möglich ist, die projectivische Geometrie ohne metrische Begriffe, also ohne den Begriff der Congruenz und der Grösse von Winkeln und Strecken zu begründen.

Die Voraussetzungen, von denen der Verfasser ausgeht, sind diese: Es existirt im dreidimensionalen Raume ein System von unendlich vielen Flächen mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Durchschnittscurve, welche zwei Flächen des Systems gemein haben können, (d. i. die Gesamtheit ihrer gemeinsamen Punkte) gehört allen Flächen an, die zwei Punkte der Curve enthalten; diese Curven heissen gerade Linien oder Gerade.

2) Durch drei beliebig angenommene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, lässt sich eine und nur eine Fläche des Systems hindurchlegen. Diese Flächen heissen Ebenen.

Durch zwei Punkte einer Ebene lässt sich also stets eine Gerade legen, die ganz in die Ebene fällt, die Gerade setzt sich in beiden Richtungen unbegrenzt fort; es ist aber nicht ausgemacht, ob sie geschlossen ist oder nicht. Zwei Gerade in derselben Ebene können nur einen Punkt gemein haben. Durch diese Voraussetzungen ist die Ausführbarkeit von Constructionen in der Ebene gesichert. Es lässt sich aber bekanntlich die harmonische Teilung ohne den Begriff des Doppelverhältnisses geometrisch definiren und mit dem Lineal ausführen. Sind nun auf einer Geraden die Punkte A, B, C gegeben, welche in alphabetischer Reihenfolge liegen, so kann man diese Punkte als Bilder der Zahlen $0,\ 1,\ \infty$ ansehen. Construirt man jetzt den zu A zugehörigen vierten harmonischen D, so werde dieser als Bild der Zahl 2 genommen; der Punkt E, der harmonisch zu 1 in Bezug auf 2 und ∞ liegt, stellt die Zahl 3 der u. s. f.; so erhält man die Reihe der positiven ganzen Zahlen durch Punkte der endlichen Strecke AC dargestellt, die sich gegen C zu immer dichter zusammendrängen. Ebenso lässt sich in die Strecke 0-1 der Punkt $\frac{1}{2}$ als vierter harmonischer zu ∞ construiren, und weiter der Punkt $\frac{1}{2^p}$ und die Reihe $\frac{1}{2^p},\ \frac{2}{2^p},\ \frac{3}{2^p},\ \cdots,\ \frac{\infty}{2^p}\cdot$ Jede andere positive reelle Zahl kann weiter durch eine convergente unendliche Reihe dargestellt werden, deren Glieder nach Potenzen von $\frac{1}{2}$ fortschreiten, und der entsprechende Punkt kann hierdurch als Grenzlage einer gewissen Punktreihe mit beliebiger Annäherung erreicht werden. (Für rationale Zahlen ergiebt sich später eine einfachere directe Construction.) Hierdurch ist ohne jede metrische Bestimmung eine geometrische Darstellung einer beliebigen positiven Zahl n definirt. Die Zahl $-n$ ist weiter darzustellen als vierter harmonischer Punkt zu $+n$ in Bezug auf 0 und ∞, sofern ein solcher existirt; denn es ist nicht verbürgt, dass die Strahlen, auf denen diese Punkte der Construction nach liegen müssen, die eine oder die andere Verlängerung von AC treffen. Man ist deshalb dazu geführt, umgekehrt zu verfahren. Ein beliebiger Punkt P einer der beiden Verlängerungen hat sicher einen vierten harmonischen Q, beide getrennt durch 0 und ∞. Der Punkt Q stellt eine Zahl $+n$ dar, also stellt P die Zahl $-n$ dar. Wir nehmen zunächst an, die Gerade sei ungeschlossen, und lassen den Punkt P zuerst die Verlängerung von AC über A (Null) hinaus bis ins Unendliche durchlaufen; dann erhält man die Darstellung der Zahlen zwischen Null und $+\mathit{\Lambda}_1 = M$. Man lasse ferner den Punkt P die Verlängerung über C hinaus bis ins Unendliche durchlaufen, so erhält man die Zahlenreihe von $-\infty$ bis $-\mathit{\Lambda}_2 = -N$; es lässt sich beweisen, dass die Zahl $+M$ in der Zahlenreihe nicht hinter $+N$ liegen kann. Es sind also zwei Annahmen möglich. Entweder die Punkte $+M$ und $+N$

sind verschieden: dann fehlt in der reellen Zahlenreihe das Gebiet von $-M$ bis $-N$, d. h. zwischen Λ_1 und Λ_2; oder die Punkte $+M$ und $+N$ fallen zusammen: dann ist diese Zahlenreihe vollständig darstellbar. Es bleibt noch die Möglichkeit, dass die Gerade AC geschlossen sei; dann ergiebt die analoge Betrachtung, dass die Darstellung der Zahlenreihe es auch ist. Von den drei möglichen Annahmen führt die erste auf die hyperbolische Geometrie, bei welcher die Gerade zwei unendlich ferne Punkte hat; die zweite auf die parabolische oder euklidische Geometrie, bei welcher die Gerade einen unendlich fernen Punkt hat; die dritte auf die elliptische, bei welcher die Gerade endlich und geschlossen ist.

Die Verlegung des Nullpunktes nach dem Punkte q und des Einheitspunktes nach dem Punkte $q+p$, während der Punkt ∞ derselbe bleibt, hat zur Folge, dass die demselben Punkte P in beiden Bestimmungsweisen entsprechenden Abscissen (so wollen wir die oben betrachteten Zahlen in ihrer geometrischen Beziehung nennen) ξ und ξ' zusammenhängen durch die Gleichung

$$\xi = q + p\xi'.$$

Hierdurch werden die neuen Abscissen Λ_1' und Λ_2' der unendlich entfernten Punkte natürlich auch erhalten, und diese brauchen nicht immer negativ zu sein. So ist ohne Zuhülfenahme metrischer Bestimmungen eine Grundlage für die analytische Geometrie gewonnen. Es ist nicht thunlich, die weiteren Betrachtungen hier genauer zu verfolgen. Es sei nur bemerkt, dass man auf diesem Wege eine von metrischen Bestimmungen unabhängige Definition der Doppelverhältnisse gewinnt, dass die Zahlen, welche wir als Abscissenwerte für die Gerade AC wählten, selbst die Werte solcher Doppelverhältnisse sind, und dass die projectivischen Eigenschaften der Figuren unabhängig von metrischen Bestimmungen und unabhängig davon bestehen, ob hyperbolische, parabolische oder elliptische Geometrie vorausgesetzt ist.

Um nun aber von dem jetzt erlangten Standpunkte zu metrischen Eigenschaften zu gelangen, muss man auf künstlichem Wege die Begriffe Entfernung, Winkel, Congruenz bilden, und hierzu kann die Betrachtung der Bewegung dienen. Bei diesen Untersuchungen ist es jedoch von wesentlichem Einfluss, ob der Raum hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch angenommen wird. Es handelt sich nämlich darum, ob es eine solche Bewegung des Raumes in sich giebt, d. h. eine solche Transformation, bei welcher jedem endlichen Punkte wieder ein endlicher Punkt entspricht, jeder Geraden wieder eine Gerade, und bei welcher die als Entfernungen und als Winkel definirten Grössen unverändert bleiben. Es handelt sich also um lineare Transformationen, die von höchstens drei Parametern abhängen, und bei denen die unendlich entfernten Elemente in einander übergehen. In glücklicher Weise ist es dem Verfasser bei dieser schwierigen Untersuchung gelungen, unnötige Verwickelungen zu vermeiden, indem er stufenweise von den einfachsten zu den allgemeinsten Bewegungen aufsteigt. Er beginnt mit der Verschiebung der Geraden in sich. Sind Λ_1 und Λ_2 die Abscissen der unendlichen entfernten Punkte (in der hyperbolischen Geometrie), und ist die Linie so in sich verschoben, dass der Punkt x nach ξ gekommen ist, so folgt aus einfachen Functionsbetrachtungen, dass die Entfernung r der beiden Punkte sich folgendermassen ausdrücken muss:

$$r = k \ln \frac{\xi - \Lambda_1}{\xi - \Lambda_2} \cdot \frac{x - \Lambda_2}{x - \Lambda_1},$$

wo k eine Constante bedeutet. Hieraus ergiebt sich das Doppelverhältnis zweier Punktepaare $x,\ y$ und $\xi,\ \eta$, wenn die Entfernungen $x\xi = r$, $x\eta = r'$, $y\xi = \varrho$, $y\eta = \varrho'$ genannt werden

$$\frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{y-\eta}{y-\xi} = \frac{\sin\frac{ir}{2k}}{\sin\frac{ir'}{2k}} \cdot \frac{\sin\frac{i\varrho'}{2k}}{\sin\frac{i\varrho}{2k}}.$$

Diese Formel geht nur im Grenzfalle $k = \infty$, d. h. für die euklidische Geometrie, über in

$$\frac{x-\xi}{x-\eta} \cdot \frac{y-\eta}{y-\xi} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{\varrho'}{\varrho},$$

welche früher bewiesen war.

Hiermit ist nun die Grundlage gewonnen, um die Bewegung der Ebene in sich zu untersuchen, die sich durch eine Collineation darstellt, bei der die unendlich entfernte Curve, ein reeller Kegelschnitt, in dessen Innerem die endlichen Punkte der Ebene liegen, sich in sich selbst transformirt. Analog wird dann die räumliche Bewegung betrachtet. Für die elliptische Geometrie ergiebt sich aus dem Umstande, dass die Gerade endlich geschlossen ist, eine Λ_1 und Λ_2 conjugirte complexe Zahlen werden, und die Constante k imaginär wird. Die parabolische oder euklidische Geometrie kann als Grenz- und Uebergangsfall der beiden anderen Fälle betrachtet werden.

Obwohl nun jeder der drei denkbaren Arten von Geometrie in sich logisch und consequent ausgebildet werden kann, so ist doch nur die euklidische in Einklang zu bringen mit unseren Raumvorstellungen. Gleichwohl bezeichnet der Verfasser das Studium der nichteuklidischen Geometrie als äusserst lehrreich, weil auf diesem Wege die Frage sicher entschieden wird, nämlich ob das Parallelenaxiom zu entbehren ist oder nicht. Es zeigt sich deutlich, dass ein solches Axiom oder Postulat unentbehrlich ist, wenn auch seine Formulirung wechseln kann. Jene Untersuchungen haben also vor allem einen erkenntnistheoretischen Wert.

Gelegentlich dieser Untersuchungen kommt der Verfasser auch wiederholt auf den Begriff des Raumes von mehr Dimensionen zu sprechen, und es ist ihm vollständig zuzustimmen, wenn er gegenüber den metaphysischen Spielereien, die heute stellt. Nachdem er nämlich auseinander gesetzt hat, dass es einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zu betrachten u. s. w., wenn man nur über die letztere gewisse, den geometrischen Axiomen entsprechende Voraussetzungen macht, fährt er fort: Man muss sich nur nicht verleiten lassen, aus der Möglichkeit einer solchen rein formalen Verallgemeinerung analytischer Begriffe und Gleichungen auf die thatsächliche Existenz einer vierten Dimension zu schliessen.

Den Abschluss der Untersuchungen über die verschiedenen Arten von Geometrie bildet nun eine eingehende Untersuchung und Kritik der Definitionen, Postulate (*ὅϱοι*, *αἰτήματα*) und Axiome (*κοιναὶ ἔννοιαι*).

Es ist sehr interessant, wie der Verfasser nachweist, dass die Hypothesen der modernen Geometrie mit den Postulaten und Axiomen des Euklid vollständig übereinstimmen, wenn man gewisse Ergänzungen zu letzteren hinzuführt, ohne die sie überhaupt nicht ganz ausreichend wären. Das Resultat dieser Untersuchung fasst der Verfasser in folgenden Worten zusammen: Wir stehen im wesentlichen auch heute noch auf dem Standpunkte des Euklid und müssen immer von neuem den Scharfsinn bewundern, mit dem es schon im Altertum möglich war, aus der Fülle der geometrischen Anschauungsformen diejenigen einfachsten Gesetze zu abstrahiren, welche notwendig und hinreichend waren, um aus ihnen alle Eigenschaften geometrischer Figuren rein logisch zu construiren. Uebrigens sei bemerkt, dass der Verfasser der in Peyrard's Ausgabe der "Oeuvres d'Euclide" 1814-18 wiederhergestellten richtigen Anordnung gefolgt ist, welche übrigens auch E. F. August in der griechischen Ausgabe der Elemente (Berolini 1826, Trautwein) innegehalten hat. Danach ist die Grundlage der Parallelentheorie im V. Postulat ausgesprochen, welches früher fälschlich unter die Axiom gekommen und als elftes derselben bezeichnet worden war, wie es denn auch heute noch vielfach genannt wird.

Die folgenden Capitel der dritten Abteilung behandeln zunächst die endlichen Gruppen von Bewegungen in der elliptischen Geometrie, und hieran schliesst sich die Betrachtung der Ikosaedergruppe, des zehnfachen Brianchon'schen Sechsecks, sowie die Auflösung der Gleichungen des fünften Grades. Die beiden letzten Capitel haben zum Gegenstande die Darstellungen der binären Formen auf der Kugelfläche und der Werte einer complexen Variable durch die Punkte der Ebene. Der Verfasser begründet in diesem letzten Capitel die gewöhnlich als Gauss'sche Darstellung bezeichnete, aber von Argand herrührende Darstellung der complexen Grössen ohne metrische Betrachtungen durch die von Staudt'sche Theorie.

Ein ausführlicher Index und einige Verbesserungen und Zusätze bilden den Schluss. Ein Druckfehler auf Seite 470 Formel (8) ist dort übersehen; die Formel muss heissen

$$\left(\cos\frac{r}{2ki}\right)^2 \varOmega_{xx}\varOmega_{yy} - \varOmega_{xy}^2 = 0.$$

Dies ist in grossen Zügen der Inhalt des Werkes, dem wohl ein hervorragender und dauernder Wert in der mathematischen Litteratur zugesprochen werden darf.

Reviewer: August, Prof. (Berlin)