Lie, Sophus

Theorie der Transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt. Unter Mitwirkung von F. Engel.

(German) JFM 23.0364.01
Leipzig. B. G. Teubner. IV + 554 S. 8° (1890).

Wegen des ersten Abschnittes dieses Werkes sei, namentlich auch mit Rücksicht auf verschiedene, im folgenden gebrauchte Bezeichnungen, auf die eingehende Besprechung von Hrn. Engel (F. d. M. XXI. 1889. 356 u. flgde., JFM 21.0356.02) verwiesen. Ursprünglich sollte der zweite und dritte Abschnitt zu einem Bande vereinigt werden: es erschien aber zweckmässig, den zweiten Abschnitt: "Die Theorie der Berührungstransformationen", in einem besonderen Bande herauszugeben. Der dritte Band wird dann Anwendungen enthalten. Die Theorie der Berührungstransformationen (zur Abkürzung weiterhin mit B-T bezeichnet) geht in ihren ersten Anfängen auf Euler, Lagrange, Ampère, Jacobi zurück, die einzelne solcher Transformationen zur Integration von Differentialgleichungen benutzten; eine systematische Theorie derselben hat erst Hr. Lie geschaffen.

Ursprünglich durch das Studium gewisser merkwürdiger geometrischer Abbildungen darauf geführt, hat Hr. Lie wesentlich für seine Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung die B-T und deren Gruppen zu einer selbständigen Hülfstheorie ausgebildet.

Von dieser historischen Entwickelung ist freilich in der vorliegenden Bearbeitung, der Systematik zu Liebe, wenig übrig geblieben; der Referent möchte persönlich bedauern, dass insbesondere die geometrische Denkweise und die mannigfaltigen, so sehr anregenden geometrischen Anwendungen beinahe völlig haben zurücktreten müssen.

Die Begründung der B-T wird in dankenswerter Weise auf drei Stufen verteilt, und wird erst für die Ebene, dann für den gewöhnlichen Raum und nunmehr erst in völliger Allgemeinheit für beliebig viele Veränderliche auseinandergesetzt.

Man gelangt zu einer gewissen Gattung von B-T unmittelbar von den gewöhnlichen Punkttransformationen T aus. Es liege eine solche in der Ebene vor, und es werde vermöge derselben jeder Punkt $P(x, y)$ in einen bestimmten Punkt $P_1(x_1, y_1)$ übergeführt, und umgekehrt. Dann geht eben vermöge dieser T auch irgend eine "Richtung" durch P in eine bestimmte Richtung durch P_1 über, und umgekehrt.

Analytisch findet diese Thatsache ihren Ausdruck in der "Erweiterung" der T; d. h. auf Grund der gegeben gedachten Transformationsformeln lässt sich sofort auch die erste Ableitung $\frac{dy_1}{dx_1} = y_1'$ in Function von x, y, und der ersten Ableitung $\frac{dy}{dx} = y'$ ausdrücken.

Fasst man nunmehr die vorliegende T auf als eine solche in den drei Veränderlichen x, y, y', so hat man eine (uneigentliche) B-T vor sich. In der That geht (wenn man den Inbegriff von Punkt und einer durch ihn gehenden Richtung als "Linienelement" bezeichnet) jedes Linienelement (x, y, y') über in ein bestimmtes Linienelement (x_1, y_1, y_1'), und damit gehen Curven, welche sich an einer Stelle "berühren", wiederum in eben solche über.

Die erweiterte T besitzt demnach analytisch die Eigentümlichkeit, dass die Gleichung $\frac{dy}{dx} = y'$ stets die andere $\frac{dy_1}{dx_1} = y_1'$ zur Folge haben muss, oder, was dasselbe ist, dass sich die beiden "Pfaff'schen Differential-Ausdrücke" $dy - y'dx$ und $dy_1' - y_1'dx_1$ nur um einen (selbst noch von x, y, y' abhängigen) Factor unterscheiden. Dafür sagt man kürzer: "Die erweiterte T lässt die Pfaff'sche Gleichung $dy - y'dx = 0$ invariant".

Der so durch Erweiterung zu einer B-T gewordenen T haftet indessen offenbar die Specialität an, dass Linienelemente mit gemeinsamem Punkte im allgemeinen wieder in solche übergeführt werden. Macht man sich von dieser Beschränkung frei, so ergiebt sich der allgemeine Begriff der eigentlichen B-T.

Dieselben sind charakterisirt als solche (umkehrbare) Transformationen in den drei Veränderlichen:

$$(I) \quad x_1 = X(x, y, y'), \quad y_1 = Y(x, y, y'), \quad y_1' = \Pi(x, y, y'),$$

welche die Pfaff'sche Gleichung $dy - y'dx = 0$ invariant lassen. Die Functionen X, Y haben dann einer linearen partiellen Differentialgleichung $[XY] \equiv 0$ zu genügen, und umgekehrt: wenn das der Fall, so bestimmen sie Π und damit eine B-T eindeutig. Wir kommen später darauf zurück.

Es wird gezeigt, dass es ausser dieser einen invarianten Pfaff'schen Gleichung keine weitere geben kann.

Ein einfaches Beispiel bietet die Poncelet'sche Transformation der Ebene, welche die Linienelemente eines Punktes überführt in diejenigen einer Geraden, nämlich der Polaren des Punktes bez. eines festen Kegelschnittes, und umgekehrt. Ist der Kegelschnitt durch die Gleichung $2y - x^2 = 0$ festgelegt, so lautet die B-T:

$$x_1 = y', \quad y_1 = xy' - y, \quad y_1' = x.$$

Die erste Aufgabe ist naturgemäss die, sämtliche B-T der Ebene zu ermitteln.

Es sind nur zwei verschiedene Fälle denkbar; entweder folgen aus den Gleichungen (I) zwei unabhängige Relationen zwischen x, y, x_1, y_1 allein, oder aber nur eine einzige. Der erste Fall liefert die erweiterten Punkttransformationen, also die uneigentlichen B-T, der zweite dagegen die eigentlichen B-T. Man erhält daher die letzteren, indem man irgend eine (nur noch einer gewissen Bedingung genügende) Relation $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ zu Grunde legt und aus ihr und den beiden, durch Differentiation folgenden:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \, \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + y_1' \, \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0$$

x, y, y' als Functionen der x_1, y_1, y_1' (und umgekehrt) berechnet. Im folgenden ist nun nur noch von eigentlichen B-T die Rede. Diese B-T der Ebene geben aber, genau wie die gewöhnlichen T, zur Bildung von "endlichen continuirlichen Gruppen" (im folgenden mit G bezeichnet) Anlass.

Die unendliche Mannigfaltigkeit dieser G von B-T der Ebene wird – wenn wir hier vorgreifen – eine sehr übersichtliche, wenn man alle diejenigen G, die selbst wieder durch Ausführung von B-T einander übergeführt werden können, in einen "Typus" zusammenfasst.

Es stellt sich das merkwürdige Ergebnis heraus, dass es nur drei Typen von B-T Gruppen in der Ebene giebt, eine sechsgliedrige G_6, eine siebengliedrige G_7 und eine zehngliedrige G_{10}; die beiden erstgenannten sind Untergruppen der letzten.

Diese G_{10} spielt eine fundamentale Rolle in der Geometrie der Ebene und des Raumes. Einmal lässt sie sich auf die kanonische Gestalt derjenigen G von B-T der Ebene bringen, welche "Kreise stets wieder in Kreise" überführen; deutet man dagegen x, y, y' als rechtwinklige Coordinaten des Raumes, so erscheint die G_{10} als diejenige projective Gruppe von Punkttransformationen, welche "einen linearen Complex invariant lassen".

Von jenen drei G werden auch die invarianten, sowie die grössten Untergruppen bestimmt, endlich auch die bei ihnen invarianten Differentialgleichungen niedrigster Ordnung. Die drei G besitzen ihre Analoga in höheren Räumen, ohne daselbst die Gesamtheit der Typen zu erschöpfen.

Wir kehren zu einer einzelnen B-T der Ebene zurück.

Die ∞^1 Linienelemente eines Punktes verwandeln sich bei Anwendung der B-T im allgemeinen in die ∞^1 Linienelemente einer Curve, die einer Curve im allgemeinen wiederum in die einer Curve und nur im besonderen in die eines Punktes.

Es liegt daher nahe, die Begriffe Punkt und Curve einem einzigen Begriffe, der "Element-Mannigfaltigkeit" ("Element-M_1") zu subsumiren, welche sich auch analytisch einfach definiren lässt, besonders, wenn man, wie es später geschieht, homogene Coordinaten einführt, was den Vorteil bietet, nicht Ausnahmefälle mehr ausschliessen zu müssen. Die B-T lassen sich dann einfach dahin charakterisiren, dass sie irgend eine Element-M_1 stets wieder in eine solche überführen.

Der Begriff der Element-M_1 gestattet unter anderem sofort eine Verallgemeinerung des Problems, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $W(x, y, y') = 0$ zu integriren; man hat eben alle Element-M_1 zu bestimmen, deren Linienelemente (x, y, y') der Gleichung $W = 0$ genügen.

Von besonderer Bedeutung ist die Schar der ∞^2 Curven, welche vermöge einer B-T den Punkten der Ebene zugeordnet ist; da man umgekehrt bei beliebiger Annahme einer ∞^2 Curvenschar stets (in noch sehr mannigfaltiger Art) eine zugehörige B-T finden kann. Die Folgerungen, welche sich hieraus für die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (deren Integralcurven dann die fragliche Curvenschar bilden) ziehen lassen, liegen auf der Hand.

Die Ausdehnung der Theorie der B-T auf den Raum und auf höhere Mannigfaltigkeiten stösst begrifflich auf keine principiellen Schwierigkeiten, obschon die Beschaffung des erforderlichen analytischen Apparates durchaus nicht so leicht ist. Man könnte, was zunächst den gewöhnlichen Raum angeht, ganz wie in der Ebene, den Inbegriff von Punkt ind einer durch ihn gehenden Richtung transformiren; es ist aber zweckmässiger, die Richtung zu ersetzen durch die auf ihr senkrecht stehende Ebene, und somit den Inbegriff von Punkt und einer durch ihn gehenden Ebene, das "Flächenelement", als Fundament einzuführen. Die "Coordinaten" des Flächenelementes sind die fünf Grössen x, y, z, $p = \frac{\partial z}{\partial z}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Eine B-T ist dann wiederum als eine solche Transformation der x, y, z, p, q zu definiren, welche die Pfaff'sche Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ invariant lässt. Flächen, die sich berühren, gehen dabei wiederum in solche über. Man wird jetzt bei vorgelegten Transformationsgleichungen drei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem aus denselben entweder eine, oder zwei, oder eindlich drei unabhängige Relationen zwischen den x, y, z und ihren transformiren x_1, y_1, z_1 allein folgen.

Der zuletzt genannte Fall führt wiederum auf die "erweiterten" Punkttransformationen zurück.

Der erste Fall liefert eine unbegrenzte Anzahl eigentlicher B-T. Denn man kann umgekehrt von einer beliebigen (nur einer gewissen Bedingung genügenden) Relation $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z{-}_1) = 0$ ausgehen, erhält durch Differentiation die vier weiteren Relationen:

$$\begin{aligned} p\,\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad q\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \\ p_1\,\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = 0, \quad q_1\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0, \end{aligned}$$

und denkt sich nunmehr diese fünf Gleichungen, sei es nach x, y, z, p, q, sei es nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 aufgelöst.

Endlich stösst man bei analoger Untersuchung des zweiten Falles auf eine zweite Gattung eigentlicher B-T.

Legt man sich nämlich jetzt zwei Relationen vor:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

und bedeuten $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ die totalen Differentiale der linken Seiten, so hat man drei Functionen $\varrho, \lambda_1, \lambda_2$ von x, y, z, p, q so zu bestimmen, dass die beiden Pfaff'schen Gleichungen:

$$\lambda_1 d\Omega_1 + \lambda_2 d\Omega_2 = 0, \quad dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(dz - pdx - qdy) = 0$$

aequivalent werden. Das giebt fünf Gleichungen, aus denen man noch ϱ und $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eliminire: im Verein mit $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ resultiren so fünf Gleichungen, die eine B-T darstellen. Nunmehr sind die drei Arten von Punktmannigfaltigkeiten des Raumes: "Punkte, Curven und Flächen" dem einzigen Begriffe der "Elementmannigfaltigkeit" unterzuordnen. Eine solche ist analytisch (was im Falle der Ebenen noch nicht erwähnt war) durch ein solches Gleichungssystem zwischen den Coordinaten x, y, z, p, q eines Flächenelements definirt, welches der Pfaff'schen Gleichung $dz - pdx - qdy = 0$ genügt.

Hier macht sich aber bereits der Unterschied gegenüber der Ebene bemerklich, dass eine Element-Mannigfaltigkeit aus ∞^2 oder nur aus ∞^1 verschiedenen Flächenelementen bestehen kann; demgemäss wird sie als eine "Element-M_2" resp. "Element-M_1" bezeichnet. Die Element-M_1 ergeben sich, indem man aus den ∞^2 Flächenelementen einer Curve oder eines Punktes nach Massgabe eines beliebigen Gesetzes eine ∞^1 Schar ausscheidet.

Die B-T lassen sich jetzt einfach dahin charakterisiren, dass sie jede Element-M_2 (und ebenso jede Element-M_1) wieder in eine solche überführen; Punkte können also dabei in Punkte oder in Curven oder in Flächen übergehen u. s. f.

Das Problem der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ erweitert sich jetzt offenbar dahin, aus der ∞^4 Schar von Flächenelementen, welche durch die Gleichung $\varphi = 0$ definirt sind, alle Element-M_2 auszuscheiden, oder genauer, jene ∞^4 Schar zu zerlegen in lauter ∞^2 Scharen, welche je einer Element-M_2 angehören. Von Wichtigkeit ist hierbei wiederum die Umkehrbarkeit der Zuordnung zwischen den Punkten des Raumes und einer ∞^3 Flächenschar.

Die hervorragendsten B-T des Raumes sind einmal die Poncelet'sche Transformation durch reciproke Polaren (in Bezug auf eine feste Fläche zweiten Grades), sodann die von Lie (Math. Ann. V) entdeckte merkwürdige B-T, welche die geraden Linien in die Kugeln überführt.

Die Haupttangentencurven einer Fläche gehen bei der letzteren B-T in die Krümmungslinien einer zweiten Fläche über.

Aus dieser B-T heraus ist die ganze Theorie entstanden.

Die allgemeine Theorie der B-T und ihre Durchdringung mit derjenigen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (wegen einer vollständigen Integration der letzteren muss übrigens auf die Originalabhandlungen Lie's verwiesen werden), sowie die vielen wichtigen, damit in Zusammenhang stehenden Probleme können hier nur kurz gestreift werden.

Eine Transformation in den $2n+1$ Veränderlichen $z, x_1, x_2, \dots, x_n,\ p_1, p_2, \dots, p_n$ ist eine B-T, wenn sie die Pfaff'sche Gleichung $dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$ invariant lässt (die p brauchen dabei nicht notwendig die Ableitungen von z nach den x zu sein). Ein elegantes Kriterium dafür sagt aus, dass die Functionen $Z, X_1, X_2, \dots, X_n$, welche die neuen Variabeln durch die alten und die p ausdrücken, paarweise in Involution liegen; zwei Functionen Φ, Ψ "liegen in Involution", wenn

$$[\Phi\Psi] \equiv \sum_\nu \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu} + p_\nu\,\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} + p_\nu\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right\} = 0.$$

Damit sind die weiteren Functionen, welche die P durch alle alten Variabeln ausdrücken, von selbst eindeutig bestimmt. Das Problem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F(z, x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ spricht sich dahin aus: es sollen alle "Element-M_n" von $F = 0$ gefunden werden.

Der fundamentale Begriff, welcher beide Theorien mit einander verknüpft, ist eben der der Involution: während derselbe bei den früheren Analytikern gelegentlich und nur als Formel auftrat, ist es das Verdienst Lie's, seine innere Bedeutung oder, so zu sagen, seine organische Natur aufgedeckt zu haben.

Die Aufgabe der Bestimmung aller B-T reducirt sich nach Obigem auf die Integration der Gleichungen $[\ ] = 0$. Dieselbe wird wirklich durchgeführt, man kann aber auch durch blosse Ausführung von Differentiationen und Eliminationen zum Ziele kommen.

Ein wichtiges Hülfsmittel hierbei ist es, wenn die in Rede stehende Aufgabe nicht gleich für die allgemeinsten B-T, sondern erst für gewisse, ausgezeichnete Kategorien derselben gelöst wird.

Eine erste derartige Kategorie bietet sich dar durch die Forderung, dass die $2n$ Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$, $p_1, \dots, p_n$ für sich allein transformirt werden, sodass also die X und P von z frei sind. Die Function Z hat dann die Form $Az + \Omega(x, p)$, wo A eine Constante bedeutet. Ein erster bemerkenswerter Unterfall tritt ein, wenn A den Wert der Einheit hat, ein zweiter, wenn sich die additive Function Ω der x, p auf eine Constante reducirt: die X und P werden dann in den p "homogen" (von der nullten resp. ersten Ordnung). Diese zweite, selbst homogen genannte Untergattung lässt sich aber auf die noch einfachere kanonische Form bringen, bei der $Z = z$ wird und die Invarianz der Pfaff'schen Gleichung die symmetrische Gestalt erhält:

$$P_1 dX_1 + \cdots + P_n dX_n \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n.$$

Allen diesen Kategorien, wie auch den allgemeinsten B-T, kommt die fundamentale Eigenschaft zu, dass die jeweils einer solchen angehörigen B-T eine (unendliche) "Gruppe" bilden.

Damit sind die Vorbeitungen getroffen zu dem wichtigsten Capitel des Buches, zur "Invariantentheorie der B-T".

Man denke sich zwei Systeme von je m Functionen der z, x, p vorgelegt: Welches sind die Kriterien dafür, dass die beiden Systeme "äquivalent" sind (wie sich der Referent der Kürze halber hier ausdrückt), d. i. durch B-T in einander übergeführt werden können, und wenn dies der Fall, wie lassen sich alle derartigen B-T ermitteln?

Es ist beachtenswert, dass, während das analoge Problem der gewöhnlichen (projectiven) Invariantentheorie noch weit von einer Lösung entfernt ist, das hier vorliegende, weit allgemeinere im Princip vollständig durchführbar wird.

Auch hier werden erst die einzelnen Untergattungen von B-T behandelt, und darauf hin erst die allgemeinsten B-T.

Die wesentlichen Hülfsbegriffe sind hierbei die einer "Functionengruppe und ihrer ausgezeichneten Functionen".

Zunächst ist die fundamentale Bemerkung vorauszuschicken, dass die allgemeinsten B-T in den z, x, p durch eine einfache Substitution auf die homogene Form gebracht werden können; man hat nur neue

Veränderliche $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ derart einzuführen, dass:

$$z = y_{n+1}, \quad x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n; \quad p_1 = \frac{-q_1}{q_{n+1}}, \ldots, p_n = \frac{-q_n}{q_{n+1}},$$

und entsprechend für die transformation z', x', p'.

Es lässt sich somit das Aequivalenzproblem von vorn herein auf den Fall reduciren, wo die invarianten Eigenschaften von (in den p) homogenen Functionen der x, p gegenüber homogenen B-T untersucht werden.

Die specifische Natur dieser Eigenschaften tritt aber prägnanter hervor, wenn man zuvor beliebige Functionen der x, p hinsichtlich der Invarianz gegenüber der (oben erwähnten) Kategorie von B-T:

$$(II) \quad z' = z + \Omega(x, p), \quad x_i' = X_i(x, p), \quad p_i' = P_i(x, p)$$

studirt.

Das Symbol $[\Phi\Psi]$, angewandt auf irgend zwei Functionen der x, p (die also von z frei sind), geht jetzt in das einfachere Symbol über:

$$(\Phi\Psi) \equiv \sum_\nu \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial\Psi}{\partial p_\nu} \right).$$

Es ist erlaubt, sich auf derartige Systeme von r unabhängigen Functionen $F_i(x, p)$ zu beschränken, für die ein jedes $(F_i F_k)$ sich als Function der F allein darstellen lässt. Dann aber gilt auch von irgend zwei Functionen der F das Nämliche, und an die Stelle des Systems der r individuellen Functionen F tritt der Begriff der r-gliedrigen "Functionengruppe", d. i. des Inbegriffs sämtlicher Functionen der F.

Es spielt dieser Begriff eine analoge Rolle, wie der des vollen Systems in der projectiven Invariantentheorie.

Die Theorie der Functionengruppen erhält ihre durchsichtige Gestallt vermöge eines gewissen "Dualismus", ganz wie die Theorie der linearen Formenscharen in der projectiven Invariantentheorie vermöge der Apolarität.

Es gilt nämlich der grundlegende Satz, dass die r linearen partiellen Differentialgleichungen $(F_i f) = 0$ in den x, p ein r-gliedriges vollständiges System bilden, und somit $2n - r$ unabhängige Lösungen Φ besitzen. Diese Functionen Φ constituiren ihrerseits eine Functionengruppe, welche zur gegebenen in einem vollständigen Reciprocitätsverhältnis steht; jede der beiden Gruppen besteht aus allen Functionen, welche mit allen Functionen der andern in Involution liegen. Jede der beiden Gruppen heisst die Polargruppe der andern. Ist die eine homogen, so ist es auch die andere.

Beide Gruppen haben eine dritte mit einander gemein, die der "ausgezeichneten" Functionen (der einen, wie der andern Gruppe); sachgemässer werden dieselben später als die "invarianten" Functionen einer Functionengruppe bezeichnet, da sie sich dadurch charakterisiren lassen, dass sie einer gewissen (unendlichen) Gruppe von B-T gegenüber invariant bleiben.

Die beiden Hauptergebnisse mögen nun angeführt werden.

Eine Functionengruppe in den x, p besitzt nur zwei Eigenschaften, welche gegenüber allen B-T von der Gestalt (II) erhalten bleiben, ihre Gliederanzahl r und die Zahl q der in der Gruppe enthaltenen unabhängigen ausgezeichneten Functionen. Umgekehrt, wenn diese beiden Eigenschaften zwei Functionengruppen in den x, p zukommen (und nur dann), so sind beide Gruppen bei (II) äquivalent.

Es giebt, wie leicht zu sehen, nur eine endliche Anzahl von "Typen" nichtäquivalenter Functionengruppen in den $2n$ Veränderlichen x, p.

Dem gegenüber steht das zweite, noch bedeutsamere Ergebnis: Eine homogene Functionengruppe in den x, p besitzt nur drei Eigenschaften, welche bei allen homogenen B-T in den x, p erhalten bleiben, nämlich ausser den beiden eben genannten noch die Anzahl q' der unabhängigen ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung; q' ist übrigens nur der beiden Werte q und $q - 1$ fähig.

Umgekehrt ist die Gemeinsamkeit der genannten drei Eigenschaften wiederum das Kriterium der Aequivalenz. Hieraus folgt dann endlich die Antwort auf die ursprünglich gestellte Frage: Liegen zwei Systeme von m Functionen $F(z, x, p)$ und $\mathfrak{F}(z', x', p')$ vor, so kann man stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob es eine B-T in den z, x, p; z', x', p' giebt, welche das eine System in das andere überführt. Zugleich lassen sich alle Eigenschaften eines beliebigen Systems von Functionen F angeben, welche gegenüber allen B-T in den vorliegenden Veränderlichen invariant sind.

Indem wir die Theorie der "Zusammensetzung" einer Functionengruppe (welche sich mit den Gesetzen der Darstellung der $(F_i F_k)$ durch die F beschäftigt) übergehen, beeilen wir uns, noch einige Worte über die endlichen, continuirlichen Gruppen G von B-T anzufügen.

Die Uebertragung der wichtigsten Begriffe und Methoden, welche hinsichtlich beliebiger G im ersten Bande entwickelt sind, bestätigt wiederum, wie sehr viel vorteilhafter es ist, mit den infinitesimalen B-T und ihren Symbolen zu rechnen, als mit den endlichen Gleichungen der B-T. Es kommt aber jetzt noch eine Reihe specifischer Vereinfachungen hinzu.

So hängt die allgemeinste, infinitesimale B-T in den z, x, p nur von der einzigen, willkürlich wählbaren Function $W(z, x, p)$ ab. Denn eine solche infinitesimale B-T lässt sich stets in der Form schreiben $[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$; und umgekehrt, liegt dieselbe in der üblichen Gestalt vor:

$$\zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \pi_i \frac{\partial f}{\partial p_i},$$

so wird die zugehörige Function W einfach

$$W = \sum_i p_i \xi_i - \zeta.$$

Man kann dann geradezu mit den Functionen W direct rechnen. Auch die Theorie der Zusammensetzung der G von B-T gestattet eine ähnliche Behandlung, wie diejenige beliebiger G von Punkttransformationen. Man erhält beidemal das Resultat, dass alle Gruppen von G mit gegebener Zusammensetzung jedenfalls durch Integration gewöhnlichen Differentialgleichungen bestimmbar sind.

Der Referent hat hiermit keineswegs den Inhalt des vorliegenden Bandes erschöpft.

Die Fruchtbarkeit der im Obigen skizzirten Theorie wird erst noch mehr hervortreten, wenn ein neuerdings in Aussicht gestelltes systematisches Werk der beiden Verfasser über die Integration der Differentialgleichungen erschienen sein wird.

Jedenfalls aber gebührt jetzt schon Hrn. Engel für die lichtvolle Darstellung des schwierigen und abstracten Stoffes der wärmste Dank aller Fachgenossen.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Clausthal)