Study, E.
Recurrirende Reihen und bilineare Formen. (German) JFM 23.0123.01
Monatsh. Math. Phys. 2, 23-54 (1891).

Es wird ein gewisses fundamentales System von irrationalen Covarianten untersucht, das zu einer ganz beliebigen (auch irgendwie ausgearteten) bilinearen Form T und contragredienten Veränderlichen gehört.

Die gemeinten Covarianten sind linear unabhängig, und durch sie lässt sich die vorgelegte Form in bestimmter Weise linear ausdrücken. Mit ihrer Hülfe wird die gegebene Form als Summe einfacherer bilinearer Formen dargestellt; eine noch weiter gehende Zerlegung in demselben Sinne kann durch invariante Processe nicht geleistet werden; die gemeinte Zerlegung ist insofern die einfachste invariante Zerlegung einer bilinearen Form, die es giebt. Der Grundgedanke des Verfahrens entwickelt sich aus einem in der Gruppentheorie üblichen Ansatze. Liegt eine bilineare Form T von N Variabelnpaaren x_i, u_i vor, so giebt es sicher eine kleinste, n^{te} $(n \leqq N)$ Potenz von T, sodass

$$T^n = \alpha_1 T^{n-1} + \cdots + \alpha_n T^0 \quad (T^0 = \Sigma x_i u_i)$$

die Gleichung niedrigsten Grades ist, der die Form T genügt. Multiplicirt man successive mit $T, T^2, T^3, \ldots$, so geht daraus eine recurrirende Reihe hervor, welche mit den Wurzeln der "charakteristischen Gleichung von T":

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_n = 0,$$

ferner mit den Lösungen der linearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + \alpha_n y,$$

endlich mit der Partialbruchzerlegung eines Bruches von der Form

$$\frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{b_0 \lambda^{n-1} + b_1 \lambda^{n-2} + \cdots + b_n}{\lambda^n - \alpha_1 \lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_n}$$

in engstem Zusammenhange steht.

Der Verf. entwickelt daher vorweg eine systematische Darlegung dieses Zusammenhanges, die vielfach über Bekanntes hinausgeht, und deren Fruchtbarkeit vor allem von einer eleganten, symbolischen Auflösung gewisser linearer Gleichungssysteme abhängt.

Zunächst wird der allgemeine Fall behandelt, wenn die Wurzeln von $\varphi(\lambda) = 0$ ungleich sind; erst dann werden die schwierigen Modificationen hinzugefügt, die bei irgend welcher Coincidenz der Wurzeln einzutreten haben. Die Anwendung des hiermit angedeuteten Zusammenhanges auf die vorliegende Aufgabe liefert fast unmittelbar ein System der gesuchten Covarianten $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Dieselben lassen sich (im allgemeinen Falle) sehr einfach durch die (symbolischen) Gleichungen

$$T_i^2 = T_i, \quad T_i T_k = 0 \quad (i \gtrless k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

charakterisiren.

Die hieraus sich ergebenden analytischen Ausdrücke der T_i lassen ihre Covarianteneigenschaft sofort erkennen. Die Formen T_i sind übrigens nicht nur Covarianten der Grundform F, sondern auch Combinanten in dem Sinne, dass sie sich nicht ändern, wenn man T durch irgend eine Form der linearen Schar

$$K_0 T^0 + K_1 T^1 + \cdots + K_n T^n$$

ersetzt, sobald nur diese neue Form die Eigenschaft besitzt, dass ihre n ersten Potenzen gleichfalls linear unabhängig sind.

Der behandelte Gegenstand steht in enger Verknüpfung mit den bekannten Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker; er bildet aber insofern ein in sich abgeschlossenes Ganzes, als er gerade den Teil herausgreift, welcher durch die elementare Theorie der recurrirenden Reihen ausschliesslich beherrscht wird.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Clausthal)

MSC:

11B37 Recurrences
11E39 Bilinear and Hermitian forms
15A06 Linear equations (linear algebraic aspects)

Full Text: DOI

References:

[1] Wegen der Eigenschaften dieser Gleichung sehe man: Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. Crelle's J., Bd. 84.

[2] Methoden zur Theorie der ternären Formen. Leipzig. 1889. S. 20. · Zbl 21.0111.03