Study, E.

On irrational covariants of certain binary forms. (English) JFM 26.0143.01

American J. XVII, 185-215 (1895).

Bekanntlich geht die invariantentheoretische Auflösung der Gleichungen zweiten bis vierten Grades auf Cayley zurück; sie stützt sich auf identische Relationen (Syzygien) zwischen In- und Covarianten einer binären Form zweiter bis vierter Ordnung. Die linearen Factoren einer solchen Gleichung, $f=0$, treten dabei als irrationale Covarianten auf, indessen nur implicite. Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Rolle, welche die irrationalen Covarianten bei dem Auflösungsprocesse spielen (und weiterhin bei der Anwendung derselben auf die elliptischen Functionen), systematisch zu untersuchen. Er stellt das Problem allgemein so:

"Existiren algebraische Gleichungen $F=0$ oder nicht, deren Coefficienten dem System rationaler In- und Covarianten einer binären Formenreihe f_1, f_2, ... angehören, und deren Wurzeln (irrationale) Divisoren einer Form f dieser Reihe sind? Und wenn, wie bestimmt man diese Gleichungen $F=0$, insbesondere die einfachsten unter ihnen, und zweitens, wie löst man diese Gleichungen auf?"

Es wird sich empfehlen, den Kern des Verfahrens etwa für die kubischen Gleichungen $f=0$ herauszuschälen.

Von vorne herein ist zu bemerken, dass man die zur Verwendung kommenden In- und Covarianten mit solchen numerischen Factoren ausstatten wird, dass die weiterhin aufzustellenden Syzygien die einfachsten numerischen Coefficienten erhalten.

Die von Clebsch mit f, Δ, Q, R eingeführten Formen des vollen Systems einer kubischen Form f werden hier bezeichnet mit: $p=(px)^3$, $2\delta=2(\delta x)^2$, $q=(qx)^3$, $2r=4(\delta\delta')^2$. Vermöge der Syzygie: $rp^2+4\delta^3+q^2=0$ zerlegt sich $-\delta$ in zwei Linearfactoren (σx) und (τx); das sind irrationale Covarianten, nämlich Wurzeln der Gleichung sechsten Grades: $y^6-qy^3-\delta^3=0$.

Eben diese Linearformen erzeugen eine unbegrenzte Reihe irrationaler Covarianten von p, nämlich von der Form: $\lambda(\sigma x)^a+\mu(\tau x)^a$; unter ihnen befinden sich solche, die proportional sind den Linearfactoren von p und q. Wählt man die Coefficienten λ, μ in passender Weise als dritte Einheitswurzeln, so entstehen (abgesehen von dem Factor $(\sigma\tau)$) drei neue Covarianten (λx), (μx), (νx), die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\nu x^3+3\delta x-p=0,$$

während p selbst in das Product zerfällt:

$$p=r(\lambda x)(\mu x)(\nu x).$$

Die eben erwähnte kubische Gleichung ist die "einfachste" unter allen, welche den Linearfactoren von p proportionale Linearformen definiren kann. Die von Cayley und Clebsch benutzten Linearformen hängen dagegen von einer Gleichung sechsten Grades ab.

Führt man ferner die beiden neuen Formen ein:

$$(\sigma' x)=\frac{(\sigma x)}{(\sigma\tau)},\quad (\tau' x)=\frac{(\tau x)}{(\tau\sigma)},$$

und operirt mit den $(\sigma' x)$, $(\tau' x)$ genau entsprechend, wie oben mit den (σx), (τx), so entstehen drei irrationale Covarianten $(\lambda' x)$, $(\mu' x)$, $(\nu' x)$, so dass $q=(\lambda' x)(\mu' x)(\nu' x)$ wird. Auf diesem Wege erhellt auch formal die reine Reciprocität zwischen den Formen p und q. Analoge, nur noch tiefer eingreifende Untersuchungen werden für die biquadratische Binärform f angestellt. Während gewöhnlich mit drei quadratischen Formen l', m', n' operirt wird, die zwar irrationale Covarianten von f, aber nicht Combinanten des Büschels $\varkappa f+\lambda h$ ($h=$ Hesse'sche Form von f) sind, so lässt sich auch die letztere Forderung erfüllen durch drei, den l', m', n' proportionale Formen l, m, n, wodurch die ganze Theorie nicht nur ein elegantes Gepräge erhält, sondern auch zu andern Theorien (z. B. der der Quaternionen) in nahe

Verwandtschaft tritt. Wegen der Anwendung auf die elliptischen Functionen siehe das bezügliche Referat.

Reviewer: Meyer, F. ;Prof. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI