Stöckert, O. A.

Ueber die Beziehungen der Reciprocantentheorie zur allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten. (German) JFM 26.0133.01

Pr. (No. 562) Realgymn. Chemnitz. 43 S. 4° (1895).

Diese Arbeit füllt eine wesentliche Lücke aus, insofern genau untersucht wird, wie sich die Sylvester'sche Reciprocantentheorie in die allgemeine Lie'sche Theorie der Differentialinvarianten einordnet.

In den Jahren 1885-1888 haben Sylvester und in Anlehnung an ihn Elliott, Leudesdorf, MacMahon, Rogers u. a. Untersuchungen über Reciprocanten veröffentlicht (cf. vor allem F. d. M. XIX. 1887. 90 ff., JFM 19.0090.02; JFM 19.0092.01). Hingegen hat Lie in den Jahren 1883 und 1884 (cf. F. d. M. XVI. 1884. 91, JFM 16.0091.01) eine allgemeine Theorie der Differentialinvarianten publicirt und übrigens schon seit 1870 auf die Beziehungen der Differentialinvarianten zur Theorie der Differentialgleichungen hingewiesen. Diese wichtigen Arbeiten waren den englischen Autoren unbekannt geblieben.

Versteht man unter x', x'', ... die Ableitungen $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, ..., bezeichnet dagegen die durch Vertauschung von x mit y daraus hervorgehenden $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., mit y', y'', ..., so lautet die ursprüngliche Definition bei Sylvester: "Ein Reciprocant ist eine Function derart, dass $F(x', x'', \dots)$ den Factor $F(y', y'', \dots)$ enthält."

Hierbei ist, wie der Verfasser hervorhebt, stillschweigende Voraussetzung, dass durch das Verschwinden der betreffenden Function der zweite Factor nicht unendlich werden darf; denn sonst würde Sylvester's Forderung durch jede Function der Ableitungen erfüllt sein.

In Lie'scher Terminologie würde die gemeinte Definition (wenn man eine ungezwungene Ausdehnung des Begriffes "Differentialinvariante" auf einzelne Transformationen zulässt) lauten: "Ein Reciprocant ist eine (absolute) Differentialinvariante, oder die linke Seite einer invarianten Differentialgleichung der Transformation":

$$x' = y, \qquad y' = x. \tag{1}$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf Differentialinvarianten. Dann ist begrifflich klar, dass eine Differentialinvariante einer continuirlichen Transformationsgruppe zugleich eine solche für jede einzelne Transformation der Gruppe ist, und umgekehrt, dass eine Differentialinvariante einer einzelnen Transformation zugleich eine solche für jede Gruppe ist, der die gegebene Transformation angehört.

Nun gehört, wie leicht zu sehen, die Transformation (1) drei sehr wichtigen Gruppen an, nämlich sowohl der "allgemeinen linearen" Gruppe:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \qquad y' = a_2x + b_2y + c_2,$$

wie auch der "orthogonalen" Gruppe:

$$x' = y\sin\alpha - x\cos\alpha + a, \qquad y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha + b,$$

wie auch endlich der "allgemeinen projectiven" Gruppe:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{ax + by + c}.$$

Somit befinden sich unter den Reciprocanten sicher die Differentialinvarianten der genannten drei Gruppen. Das ist der innere Grund, weshalb sich Sylvester im wesentlichen auf eben diese drei Klassen von Reciprocanten beschränkt hat, wenn auch der Gruppenbegriff explicite bei ihm nicht hervortritt.

Die Methoden, deren sich Sylvester und seine Nachfolger zur Bildung solcher Reciprocanten, zur Untersuchung ihres Zusammenhanges u. s. w. bedienen, sind daher im Grunde keine anderen als diejenigen, welche Lie allgemein für Differentialinvarianten continuirlicher Transformationsgruppen entwickelt hat.

Beispielsweise hat Elliott den Satz: "Sind u, v, w, φ vier absolute orthogonale Reciprocanten im Gebiete zweier unabhängigen Variabeln x, y, so ist auch

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

ein absoluter orthogonaler Reciprocant". Der Satz gilt aber ganz allgemein für Differentialinvarianten von Transformationen oder Transformationsgruppen im Gebiete von x, y. Zusammenfassend kann man sagen: "Sylvester hat durch Aufstellung der Kriterien für orthogonale, reine und projective Reciprocanten das specielle Problem aus der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten gelöst, die Differentialinvarianten der orthogonalen, der allgemeinen linearen und der allgemeinen projectiven Transformationsgruppe in zwei Veränderlichen zu bestimmen, indem er die allgemeine Methode dieser Theorie mit Umgehung des Gruppenbegriffs für diese speciellen Fälle entwickelt."

Denn in Wirklichkeit benutzt Sylvester die infinitesimalen Transformationen jener Gruppen und damit die Gruppen selbst.

Referent möchte dieser dürftigen Skizze nur noch hinzufügen, dass ein wesentlicher Teil der Sylvester'schen Formeln als unmittelbare Ausdehnung von den in der binären Invariantentheorie bekannten erscheint, wodurch sein Ausgangspunkt in ein anderes Licht rückt.

Reviewer: Meyer, F. ;Prof. (Königsberg i. Pr.)

