Wirtinger, W.

Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme. (German) JFM 27.0281.01

Math. Ann. 48, 365-389 (1897).

Die Untersuchung knüpft an das Riemann'sche Verfahren zur Integration hyperbolischer Differentialgleichungen an [Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Ges. W. 2. Aufl. S. 156-175, Art. 8 und 9] und beschäftigt sich mit dem speciellen Fall der sogenannten harmonischen Gleichungen. Die Differentialgleichung wird in der Form vorausgesetzt:

$$(1) \qquad g(t)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - h(x)\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

wo $g(t)$, $h(x)$ eindeutige, endliche, stetige Functionen sind, welche in dem betrachteten Gebiete durchaus positiv sind, und deren und zweite Derivirten durchaus endlich und, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen, auch stetig sind. Die Gleichung (1) wird durch Einführung der Charakteristiken $\xi\eta$ derselben als neue Variabeln in die Form übergeführt: (2) $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} = [\mu(\xi-\eta)+\nu(\xi+\eta)].\zeta$, wobei $\zeta = z.h(x)^{\frac{1}{4}}$ gesetzt ist. In die Ausdrücke von μ und ν gehen die zweiten Derivirten von $g(t)$ und $h(x)$ ein. An der Form (2) wird im §2 der Abhandlung das Riemann'sche Integrationsverfahren auseinandergesetzt unter der Annahme, dass die Werte von z, bezw. ζ längs einer Curve in der (x,t)-Ebene bekannt sind. Die Bedenken, zu welchen dieses Verfahren Veranlassung giebt, werden im §3 dadurch beseitigt, dass ein directer Beweis für die Existenz einer gewissen, bei Riemann auftretenden Function geführt wird, welcher auf einer Methode von Picard (S. M. F. Bull. 22; F. d. M. 25, 612, 1893/94, JFM 25.0612.02) beruht. Nachdem die Form des Integrals somit sichergestellt ist, geht der Verf. zu Anwendungen über. Aus §4 sei erwähnt die Untersuchung der kleinen Transversalschwingungen eines biegsamen, schweren, homogenen Fadens, der an einem Punkte aufgehängt und am anderen Ende mit einem Gewicht belastet ist. Es ergiebt sich unmittelbar, dass sich eine anfänglich auf ein kleines Gebiet beschränkte Störung mit der Zeit auf ein grösseres Gebiet ausbreiten wird. Nimmt man an, dass die angehängte Masse gleich Null ist, so findet man sofort das von Poisson (J. de l'Éc. Pol. 7) auf complicirtem Wege gefundene Resultat, dass die Ausbreitung nach oben gleichförmig beschleunigt, nach unten gleichförmig verzögert erfolgt, und zwar ist die Beschleunigung gleich der halben Fallbeschleunigung. Eine weitere Anwendung enthält §5, in welchem eine schwingende Saite von variabler Dichte und begrenzter Länge l betrachtet wird. Anfangs- und Endpunk der Saite werden als fest angenommen, und die Dichte wird als eine Function $\varrho(x)$ der Abscisse von derselben Beschaffenheit wie die Function $h(x)$ vorausgesetzt. Ist S die Spannung der Saite, so lautet die Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\varrho(x)}{S}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\cdot$ Unter der Annahme, dass für $t=0$ und $0<x<l$ vorgegeben sei: $z=\varphi(x)$, $\partial z/\partial t = \psi(x)$, wird das Integral gebildet. Die Schwierigkeit, welche darin liegt, dass Anfangszustand und Dichte nur innerhalb eines begrenzten Intervalles gegeben sind, und welche sich besonders bei der Bestimmung der in dem Integral auftretenden Function v erhebt, wird durch die Annahme behoben, dass die Functionen $\varrho(x),\varphi(x)$ und $\psi(x)$ über das Intervall $(0\dots l)$ hinaus fortgesetzt werden, indem $\varrho(x)$ als eine gerade, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ aber als ungerade Functionen mit der Periode $2l$ vorausgesetzt werden; es werden durch diese Annahme alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In derselben Weise kann auch das Problem der Transversalschwingungen einer homogenen Saite in einem widerstehenden Mittel behandelt werden, und man kommt dann auf eine Differentialgleichung, die von der sogenannten Telegraphistengleichung (Poincaré, C. R. 117, F. d. M. 25, 1695, 1893/94, JFM 25.1695.01) nicht wesentlich verschieden ist.

Die beiden nächsten Paragraphen beschäftigen sich nun eingehender mit der Function v; und zwar wird zunächst in §6 Riemann's bestimmtes Integral für die Function v mit Hülfe Fourier'scher Integrale hergeleitet und einer näheren Discussion unterzogen, während in §7 die Function v unter gewissen Voraussetzungen durch Normalfunctionen dargestellt wird. Die Betrachtungen, welche sich hier nicht in Kürze kennzeichnen lassen, werden in §8 für die Differentialgleichung der schwingenden Saite näher ausgeführt.

Nach den merkwürdigen Beziehungen zwischen der Function v und den Normalfunctionen passend gewählter

Gebiete, die unter Umständen beliebig gross sein können, wenn sie nur endlich sind, sollte erwartet werden können, dass bei der Ausdehnung der Gebiete ins Unendliche brauchbare Integraldarstellungen aus den Reihen entstehen; indessen führen die Grenzübergänge auf grosse Schwierigkeiten. Der Verf. kommt in §9 "Ueber die Schwingungen einer unendlich langen Saite von variabler Dichte" zu dem Ergebnis, dass die Schwingung einer solchen Saite, in der Sprache der Optik ausgedrückt, im allgemeinen einem Bandenspectrum entspricht. Die ausgesprochene Erwartung ist also im allgemeinen nicht erfüllt.

Reviewer: Gutzmer, Dr. (Halle a. S.)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] P. Du Bois-Reymond, Studien zur Interpret. der linearen part. Diffgl.k ter Ordnung, ferner Crelle 104. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II, pag. 71 ff.

[2] Annales de l'école normale, ser. III, tom XII.

[3] Ibid. Annales de l'école normale, ser. III Supplement.

[4] Picard: Bulletin de la société mathématique de France. t. XXII. 1894.

[5] Vgl. Riemann, partielle Differentialgleichungen herausgeg. von Hattendorf. pag. 113, III.

[6] Vgl. Poincaré, Comptes Rendus 1893, II, vom 26. Dec. Picard ebenda 1894 vom 2. Jan.

[7] Man sehe hierzu auch die Anmerkung in der zweiten Ausgabe von Riemann's Werken pag. 179-181.

[8] Vgl. Kronecker, Vorlesungen über Integrale hrsg. v. Netto, pag. 83.

[9] Für die Gültigkeitsbedingung der Reihenentwickelung vgl. Radakovi?, Wiener Monatshefte für Math. und Phys. Jahrg. V, wo auch für diey brauchbare Reihenentwickelungen gegeben sind. Dieselben ergeben sich zwar auch aus dem von Fuchs, Annali di Matematica, ser. II. tom. 4 aufgestellten allgemeinen Formeln, werden aber von Radakovi? aus der Vorstellung hergeleitet, dass die Saite von variabler Dichte aus einer Saite, welche aus einer Anzahl homogener Theile besteht, durch Vermehrung dieser Theile ins Unendliche als Grenzfall hervorgeht.