Weber, H.
Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern. (German) JFM 28.0083.06
Math. Ann. 50, 1-26 (1898).

Siehe auch JFM 28.0083.04; JFM 28.0083.05. Aus einem quadratischen Körper K (mit negativer Grundzahl) lässt sich eine Kette höherer Körper ableiten, die gewissen Zahlengruppen von K entsprechen. Zunächst ist da der „Klassenkörper", dessen Galois'sche Gruppe der Gruppe der Idealklassen in K isomorph ist. Daran reihen sich die „Ordnungskörper", die den Gruppen der Idealklassen in den verschiedenen Ordnungen von K entsprechen. Klassenkörper und Ordnungskörper sind mit der complexen Multiplication der elliptischen Functionen organisch verknüpft.

Noch höhere Körper, die in Bezug auf einen der Ordnungskörper Abel'sche sind, entspringen der Teilung der elliptischen Functionen mit einem singulären Modul und heissen daher „Teilungskörper", wobei der Teiler oder Modul m ein beliebiges Ideal von K sein kann. Es handelt sich weiterhin um die gegenseitigen Beziehungen dieser neuen Körper, sowie insbesondere um die Bestimmung ihres Grades, die auf den Beweis der Irreductibilität der die Körper definirenden Gleichungen hinauskommt. Das Haupthülfsmittel hierbei sind die Dirichlet'schen Formeln für Klassenzahlen. So ergiebt sich, dass der relative Grad eines Ordnungskörpers in Bezug auf den Körper, der ausser den rationalen Zahlen beliebige Einheitswurzeln enthält, gleich ist der Anzahl der in dem Hauptgeschlecht enthaltenen Idealklassen. Damit ist zugleich ein organischer Beweis erhalten für den berühmten Dirichlet'schen Satz, dass durch jede quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellbar sind, die zugleich in einer gegebenen Linearform enthalten sind. Der Relativgrad eines Teilungskörpers in Bezug auf den zu Grunde gelegten Ordnungskörper mit dem Modul m ist gleich der Anzahl der zu m teilerfremden, nach m incongruenten Zahlen, geteilt durch die Anzahl der nach m incongruenten Einheiten von K (wo K auch ein beliebiger Körper sein kann). Damit ist wiederum eine wichtige Verallgemeinerung des bekannten Satzes über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in arithmetischen Progressionen verbunden. Nimmt man zwei Ideale von K in eine Klasse auf, wenn ihr Quotient eine nach m mit einer Einheit congruente Zahl ist, so kommen in jeder dieser Klassen unendlich viele Primideale ersten Grades vor. Dadurch wird der Weg gebahnt zum Beweise des von Kronecker vermuteten Satzes, dass das Partialgrundideal des Klassenkörpers in Bezug auf K gleich 1 ist.

Wegen der zahlreichen neuen Einzel-Begriffe, -Sätze und Methoden, so z. B. der allgemeinen Definition der Genera, der Teilung der elliptischen Functionen u. s. w., muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI Link EuDML