Dedekind, R.

On the dual group generated by three modules. (Ueber die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe.) (German) JFM 31.0211.01

Math. Ann. 53, 371-403 (1900).

Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ den grössten gemeinsamen Teiler, mit $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so gelten für diese Operationen die drei Gesetze:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}-\mathfrak{b}=\mathfrak{b}-\mathfrak{a},$$
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}), \quad (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})-\mathfrak{c}=\mathfrak{a}-(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}),$$
$$\mathfrak{a}+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})=\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=\mathfrak{a}.$$

Wenn zwei Operationen $\pm$ aus je zwei Elementen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ eines endlichen oder unendlichen Systems $\mathfrak{S}$ zwei Elemente $\mathfrak{a}\pm\mathfrak{b}$ desselben Systems erzeugen und den Gesetzen (1), (2) und (3) genügen, so wird $\mathfrak{S}$ in Bezug auf die beiden Operationen eine Dualgruppe genannt.

In jeder Dualgruppe gilt ausser einigen Elementarsätzen auch das Gesetz:

(A) Ist $\mathfrak{D}$ ein Teiler von $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Element, so ist

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{b}<(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m}.$$

Wendet man aber die Operationen $\pm$ in der vorher angegebenen Weise auf Moduln an, so gilt das viel schärfere Gesetz:

(B) Ist der Modul $\mathfrak{d}$ ein Teiler des Moduls $\mathfrak{m}$, also $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$, und $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Modul, so ist

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{m})-\mathfrak{d}=(\mathfrak{p}-\mathfrak{d})+\mathfrak{m},$$

welches in keiner Weise aus (1), (2) und (3) ableitbar ist.

Es wird nun zunächst die aus drei Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ durch die Operationen $\pm$ erzeugte Dualgruppe $\mathfrak{D}$ eingehend untersucht; dieselbe ist endlich und besteht aus 28 Moduln, welche im allgemeinen von einander verschieden sind. Sind die Moduln Ideale, so reducirt sich die aus ihnen erzeugte Dualgruppe auf höchstens 18 verschiedene Elemente.

Es werden sodann die Beziehungen der beiden Gesetze (A) und (B) zu einander tiefer ergründet. In einer Dualgruppe $\mathfrak{S}$ heisst $\mathfrak{d}$ ein nächster Teiler von $\mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{d}<\mathfrak{m}$ ist und sich zwischen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{m}$ kein Element einschieben lässt, welches ein Vielfaches von $\mathfrak{d}$ und ein Teiler von $\mathfrak{m}$ ist. Eine Aufeinanderfolge von Elementen von $\mathfrak{S}$, von der Art, dass jedes folgende ein nächster Teiler des vorhergehenden ist, heisst eine Kette; Ketten mit gleichem Anfangs- und Endelement heissen aequivalent. In der Modulgruppe $\mathfrak{D}$ gilt das "Kettengesetz", dass aequivalente Ketten gleiche Länge haben. Es wird erwiesen, dass die Geltung dieses Kettengesetzes die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass das Gesetz (A) in das Modulgesetz (B) übergeht.

Reviewer: Landsberg, Prof. (Heidelberg)

MSC:

06C05 Modular lattices, Desarguesian lattices
06B25 Free lattices, projective lattices, word problems
03G10 Logical aspects of lattices and related structures

Keywords:

modular lattice; Dedekind lattice; free lattice

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Vergl. {\S} 4 meines Aufsatzes Ueber Zerlegungen von Zahlen durch ihre grössten gemeinsamen Theiler in der Festschrift unserer Technischen Hochschule für die Naturforscher-Versammlung 1897.

[2] Andere Beispiele von Dualgruppen findet man in der oben erwähnten Schrift (1897). Vergl. den Schluss ({\S} 8) der gegenwärtigen Abhandlung.

[3] Vergl. den Beweis des Satzes IX in {\S} 6 des gegenwärtigen Aufsatzes.

[4] Vergl. D. {\S} 171, S. 511, wo in der Anmerkung diese Benennung für die ausallen Moduln bestehende Dualgruppe eingeführt ist.

[5] Vergl. {\S} 9 meiner Abhandlung: Ueber die Anzahl der Idealclassen in reinen cubischen Zahlkörpern (Crelle's Journal Bd. 121, S. 77).

[6] Mathematische Annalen Bd. 48, S. 548.