Hurwitz, A.

Sur quelques applications géométriques des séries de *Fourier*. (French) JFM 33.0599.02

Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19, 357-408 (1902).

Ist $f(x)$ eine begrenzte und zwischen 0 und 2π integrierbare Funktion, so existieren die *Fourier*schen Konstanten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, \quad a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx,$$

und wenn $f(x)$ in eine *Fourier*sche Reihe entwickelbar ist, so lautet die Entwicklung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,a_0 + (a_1\cos x + a_1'\sin x) + (a_2\cos 2x + a_2'\sin 2x) + \cdots .$$

Aber auch wenn eine solche Entwicklung nicht existiert, lassen sich gewisse formale Operationen mit solchen Reihen vornehmen, weshalb der Verf. in jedem Falle von einer Äquivalenz der Funktion $f(x)$ und der Reihe $(f(x) \sim \frac{1}{2}\,a_0 + \cdots)$ spricht. Die Möglichkeit der angedeuteten Operationen beruht auf einem Fundamentalsatze, den Verf. an die Spitze der Arbeit stellt, und dessen Beweis ziemlich komplizierte Betrachtungen erfordert. Er lautet: Sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei begrenzte und zwischen 0 und 2π integrierbare Funktionen, sodaß also die *Fourier*schen Konstanten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, \quad a_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\cos kx dx, \; b_k' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\sin kx dx,$$

existieren, so konvergiert die Reihe

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k b_k + a_k' b_k'),$$

und es gilt die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)dx.$$

Auf Grund dieses Satzes gelingt es u. a., die Koeffizienten der dem Produkt zweier Funktionen $f(x), \varphi(x)$ äquivalenten Reihenentwicklung aus den zu f und φ gehörigen zu berechnen. Desgleichen ergibt sich in einfacher Weise aus der zu einer Funktion f gehörigen Reihe diejenige für die Integralfunktion $F = \int_0^x f(u)du$, und da die letztere zufolge bekannter Sätze eine *Fourier*sche Reihenentwicklung zuläßt, so geht für sie die Äquivalenz in eine wirkliche Gleichung über. Die geometrischen Anwendungen, welche Verf. von diesen analytischen Sätzen macht, erstrecken sich zunächst auf die Theorie der konvexen ebenen Kurven. Es werde eine solche Kurve von einem Punkte P in positivem Sinne durchlaufen und mit u der Winkel bezeichnet, den die Tangente in P mit einer fest angenommenen Richtung (x-Achsenrichtung) bildet. Wenn in jedem Punkte ein bestimmter begrenzter Krümmungsradius ϱ existiert und, als Funktion von u betrachtet, sich als integrabel erweist, so hat man für ϱ eine Äquivalenz von der Form

$$\varrho \sim \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_1^{\infty}(a_k\cos ku + a_k'\sin ku) \quad (a_1 = 0,\; a_1' = 0),$$

während sich für die Koordinaten x, y der Kurvenpunkte, als Funktionen von u betrachtet, *Fourier*sche Reihenentwicklungen, und zwar Gleichungen, nicht nur Äquivalenzen, ergeben, deren Koeffizienten, abgesehen vom konstanten Gliede, durch die a_k, a_k' bestimmt und in einfachster Weise ausdrückbar sind. Durch die Koeffizienten a_k, a'_k werden Länge L und Inhalt F der Kurve wie folgt dargestellt:

$$L = \pi a_0, \quad F = -\tfrac{\pi}{4} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k+1} \right).$$

Aus beiden Formeln folgt

$$\frac{L^2}{4\pi} - F = \tfrac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k^2 + a_k'^2}{k^2-1},$$

also $L^2 \geqq 4\pi F$, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn alle a_k, a'_k $(k > 0)$ verschwinden. Man erkennt leicht, daß dies nur im Falle des Kreises eintritt, und hat somit einen Beweis des isoperimetrischen Satzes. Für den Fall, daß ϱ, als Funktion von u betrachtet, eine endliche, integrierbare Ableitung besitzt, ergibt sich eine explizite Formel für den Inhalt E der Evolute der zugrunde gelegten Kurve (wobei der Inhaltsbegriff in bekannter Weise auch für den Fall, daß diese Kurve sich selbst schneidet, zu verstehen ist). Es wird nämlich

$$E = -\tfrac{\pi}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1} \, (a_k^2 + a_k'^2).$$

Die Formel zeigt, daß der Inhalt der Evolute wesentlich negativ und nur im Falle des Kreises Null ist. – Während bei gegebener Länge L der Grundkurve die Formel $F \leqq \frac{L^2}{2\pi}$ eine obere Grenze für ihren Inhalt liefert, wird, wenn noch der Inhalt $|E|$ der Evolute als gegeben betrachtet wird, wie Verf. zeigt, durch die Formel

$$F + \tfrac{1}{4} \, |E| \geqq \frac{L^2}{4\pi}$$

eine untere Grenze für F geliefert. Erreicht wird diese untere Grenze von den Parallelkurven der Astroide. – Zu der zugrunde gelegten konvexen Kurve C gehört eine Schar von Kurven C_ϑ, deren jede aus den Punkten besteht, von denen aus C unter einem gegebenen Winkel $\pi - \vartheta$ erscheint. ϑ variiert von 0 bis π. Für $\vartheta = 0$ erhält man die Kurve C selbst. Indem ϑ bis π wächst, dehnt sich C_ϑ ins Unendliche aus. Der Flächeninhalt F_ϑ von C_ϑ wächst dabei in der Weise ins Unendliche, daß das Produkt $\sin^2 \vartheta F_\vartheta$ dem endlichen Grenzwerte

$$A = \frac{L^2}{\pi} + 2\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k}^2 + a_{2k}'^2}{(4k^2-1)^2}$$

zustrebt. – Zu jeder Tangente von C gehört eine parallele entgegengesetzt gerichtete, sodaß , wenn u der Richtungswinkel der einen ist, derjenige der andern durch $u + \pi$ bezeichnet wird. Bezeichnet $P(u)$ den Abstand der beiden Tangenten, so stellt $P(u)$ eine Funktion mit der Periode π dar. $P(u)$ stellt zugleich die Projektion von C auf eine zur Richtung u senkrechte Gerade dar. Für das arithmetische Mittel der Funktion $P^2(u)$, d. h. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [P(u)]^2 du$, findet Verf. den Wert

$$\left(\frac{L}{\pi} \right)^2 + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{2k}^2 + a_{2k}'^2}{(4k^2-1)^2}.$$

Wenn daher nicht alle a_{2k}, a'_{2k} Null sind, so gibt es Kurvenprojektionen, die größer als $\frac{L}{\pi}$ sind, d. h. größer als die Projektion eines Kreises von gleichem Umfange. Wenn aber alle a_{2k}, a'_{2k} Null sind, so geht die allgemein für $P(u)$ geltende Formel

$$P(u) = \tfrac{L}{\pi} - \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{4k^2-1} (a_{2k} \cos 2ku + a'_{2k} \sin 2ku)$$

über in $P(u) = \frac{L}{\pi}$. Die Kurve besitzt daher in allen Richtungen dieselbe orthogonale Projektion. Diese Eigenschaft kommt demnach allen den Kurven zu, für welche die zu ϱ gehörige Äquivalenz die Form

$$\varrho(u) \sim \tfrac{1}{2} \, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k+1} \cos(2k+1)u + a'_{2k+1} \sin(2k+1)u)$$

hat. Unter der Voraussetzung, daß diese Äquivalenz durch eine Gleichung ersetzt werden kann, lässt sich eine Reihe weiterer Schlüsse ziehen. So zeigt sich, daß die Evolute einer Kurve C von konstanter Projektion eine Doppelkurve ist, indem zu zwei entgegengesetzten Punkten von C (d. h. solchen mit entgegengesetzten Tangenten) derselbe Krümmungsmittelpunkt gehört. Aus dem Umstande, daß der Ausdruck für ϱ seine Form nicht ändert, wenn man die Konstante a_0 variiert, ergibt sich, daß die Parallelkurven einer Kurve von konstanter Projektion dieselbe Eigenschaft besitzen. Nimmt man insbesondere $a_0 = 0$, so wird die Kurve (die dann natürlich nicht mehr konvex ist) eine Doppelkurve, indem jeder Punkt mit dem entgegengesetzten zusammenfällt. Hiervon ausgehend, kann man leicht einfache Kurven dieser Art herstellen.

Unter Übergehung einiger weiterer Anwendungen auf die Theorie der ebenen Kurven sei noch auf die Untersuchungen des Verf. über die Flächen kurz eingegangen. Sie beziehen sich auf solche (konvexen) Flächen, welche in jeder Richtung eine und nur eine äußere Normale haben, und liefern als wichtigste Resultate neue Beweise für einige von *Minkowski* gefundene Sätze. Hierher gehört der Satz, daß , wenn für jede Normalenrichtung die Summe der Hauptkrümmungsradien gegeben ist, die Fläche bis auf eine Parallelverschiebung bestimmt ist, ferner der Nachweis der Ungleichung

$$M^2 \geqq 2\pi O,$$

wo O die Oberfläche und M das arithmetische Mittel aus der mittleren Krümmung, d. i. den Ausdruck $\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) d\sigma$, bezeichnet. Der Nachweis der der Ungleichung $F \leqq \frac{L^2}{4\pi}$ entsprechenden Formel im Raume $V^2 \geqq \frac{O^3}{36\pi}$ ist auf dem hier eingeschlagenen Wege noch nicht gelungen; doch dürften die bisherigen Resultate genügen, um darzutun, daß die in dieser Arbeit begonnenen Untersuchungen der weiteren Forschung aussichtsreiche Wege eröffnen.

Reviewer: Steinitz, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI Numdam EuDML