Hurwitz, A.

Über *Abels* Verallgemeinerung der binomischen Formel. (German) JFM 33.0449.04

Acta Math. 26, 199-204 (1902).

Man bezeichne mit r und s zwei (positive oder negative) ganze Zahlen, mit $u, v, x_1, x_2, \dots, x_n$ unbeschränkt veränderliche Größen. Die Funktion $F_{r,s}(u, v|x_1, x_2, \dots, x_n)$ Oder $F_{r,s}$ werde durch

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} F_{r,s} = \Sigma(u + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n)^{\varrho} \\ \qquad\qquad \times(v + \varepsilon'_1 x_1 + \varepsilon'_2 x_2 + \dots + \varepsilon'_n x_n)^{\sigma} \\ \qquad [\varrho = r + \Sigma\varepsilon_i,\ \sigma = s + \Sigma\varepsilon'_i,\ i = 1, 2, \dots, n] \end{cases}$$

erklärt, worin ε'_i für $1 - \varepsilon_i$ geschrieben und die Summe in der Weise zu bilden ist, daß $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig voneinander die beiden Werte 0 und 1 erhalten. Dann gelten die Formeln:

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} F_{r,s} = F_{r+1,s}(u + x_1, v|x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\qquad + F_{r,s+1}(u, v + x_1|x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(2)}\quad \begin{cases} F_{r,s} = uF_{r-1,s} \\ \qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u + x_k, v|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(3)}\quad \begin{cases} F_{r,s} = vF_{r,s-1} \\ \qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n} x_k F_{r,s}(u, v + x_k|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(4)}\quad \begin{cases} \frac{\partial F_{r,s}}{\partial u} = rF_{r-1,s} \\ \qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u + x_k, v|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(5)}\quad \begin{cases} \frac{\partial F_{r,s}}{\partial v} = sF_{r,s-1} \\ \qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n} F_{r,s}(u, v + x_k|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

$$\text{(6)}\quad \frac{\partial F_{r,s}}{\partial x_1} = \begin{cases} (r + 1)F_{r,s}(u + x_1, v|x_2, \dots, x_n) \\ \qquad\qquad + (s + 1)F_{rs}(u, v + x_1|x_2, \dots, x_n) \\ + \sum_{k=2}^{n} F_{r,s}(u, v|x_2 \dots, x_{k-1}, x_k + x_1, +x_{k+1}, \dots, x_n). \end{cases}$$

Im besonderen für eine einzige Veränderliche x_l ist:

$$\text{(7)}\quad F_{r,s}(u, v|x_1) = (u + x_1)^{r+1} v^s + u^r (v + x_1)^{s+1}.$$

Für die Funktion $F_{-1,0}(u, v|x_1, \dots, x_n)$ ist

$$\text{(II)}\quad F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n \tfrac{1}{u},$$

$$\text{(II')}\quad \begin{cases} \Sigma(u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} \\ \times(v - x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} - \dots - x_{\alpha_\lambda})^{n-\lambda} = \frac{1}{u}(u + v)^n; \end{cases}$$

für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ geht (II') in die *Abel*sche Formel über:

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda} (u + \lambda x)^{\lambda-1} (v - \lambda x)^{n-\lambda} = \tfrac{1}{u}(u + v)^n.$$

Setzt man in (3)$r = -1$, $s = 0$, so kann man $F_{-1,-1}$ bestimmen, und es ergibt sich:

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \Sigma(u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1}(v + x\beta_1 + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} \\ \qquad = (u + v + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{n-1} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right). \end{cases}$$

Setzt man $u+v+x_1+x_2+\cdots+x_n=s$ und bezeichnet die elementar-symmetrischen Funktionen von $x_1,x_2,\ldots,x_n$ mit $f_1,f_2,\ldots,f_n$, so erhält man:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \Sigma(u+x_{\alpha_1}+\cdots+x_{\alpha_\lambda})^\lambda(v+x_{\beta_1}+\cdots+x_{\beta_\mu})^\mu \\ \qquad\qquad = s^n+|\underline{1}f_1s^{n-1}+|\underline{2}f_2s^{n-2}+\cdots+|\underline{n}f_n. \end{cases}$$

Reviewer: Weltzien, Prof. (Zehlendorf)

Full Text: DOI

References:

[1] S. Mathematische Annalen, Bd. 39, S. 1 ff.

[2] Abel, Oeuvres complètes, nouvelle édition, vol. I, p 102. · Zbl 13.0020.01