

**Hurwitz, A.**

**Über Abels Verallgemeinerung der binomischen Formel.** (German) JFM 33.0449.04  
*Acta Math.* 26, 199-204 (1902).

Man bezeichne mit  $r$  und  $s$  zwei (positive oder negative) ganze Zahlen, mit  $u, v, x_1, x_2, \dots, x_n$  unbeschränkt veränderliche Größen. Die Funktion  $F_{r,s}(u, v|x_1, x_2, \dots, x_n)$  Oder  $F_{r,s}$  werde durch

$$(I) \quad \begin{cases} F_{r,s} = \Sigma(u + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n)^\rho \\ \quad \times (v + \varepsilon'_1 x_1 + \varepsilon'_2 x_2 + \dots + \varepsilon'_n x_n)^\sigma \\ [\rho = r + \Sigma \varepsilon_i, \sigma = s + \Sigma \varepsilon'_i, i = 1, 2, \dots, n] \end{cases}$$

erklärt, worin  $\varepsilon'_i$  für  $1 - \varepsilon_i$  geschrieben und die Summe in der Weise zu bilden ist, daß  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  unabhängig voneinander die beiden Werte 0 und 1 erhalten. Dann gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} F_{r,s} = F_{r+1,s}(u + x_1, v|x_2, \dots, x_n) \\ \quad + F_{r,s+1}(u, v + x_1|x_2, \dots, x_n), \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} F_{r,s} = u F_{r-1,s} \\ \quad + \sum_{k=1}^n x_k F_{r,s}(u + x_k, v|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} F_{r,s} = v F_{r,s-1} \\ \quad + \sum_{k=1}^n x_k F_{r,s}(u, v + x_k|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases} \\ (4) \quad & \begin{cases} \frac{\partial F_{r,s}}{\partial u} = r F_{r-1,s} \\ \quad + \sum_{k=1}^n F_{r,s}(u + x_k, v|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases} \\ (5) \quad & \begin{cases} \frac{\partial F_{r,s}}{\partial v} = s F_{r,s-1} \\ \quad + \sum_{k=1}^n F_{r,s}(u, v + x_k|x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases} \\ (6) \quad & \frac{\partial F_{r,s}}{\partial x_1} = \begin{cases} (r+1)F_{r,s}(u + x_1, v|x_2, \dots, x_n) \\ \quad + (s+1)F_{r,s}(u, v + x_1|x_2, \dots, x_n) \\ \quad + \sum_{k=2}^n F_{r,s}(u, v|x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + x_1, x_{k+1}, \dots, x_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Im besonderen für eine einzige Veränderliche  $x_1$  ist:

$$(7) \quad F_{r,s}(u, v|x_1) = (u + x_1)^{r+1} v^s + u^r (v + x_1)^{s+1}.$$

Für die Funktion  $F_{-1,0}(u, v|x_1, \dots, x_n)$  ist

$$\begin{aligned} (II) \quad & F_{-1,0} = (u + v + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n \frac{1}{u}, \\ (II') \quad & \begin{cases} \Sigma(u + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} \\ \times (v - x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} - \dots - x_{\alpha_\lambda})^{n-\lambda} = \frac{1}{u} (u + v)^n; \end{cases} \end{aligned}$$

für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  geht (II') in die *Abelsche* Formel über:

$$\sum_{\lambda=0}^n \binom{n}{\lambda} (u + \lambda x)^{\lambda-1} (v - \lambda x)^{n-\lambda} = \frac{1}{u} (u + v)^n.$$

Setzt man in (3)  $r = -1, s = 0$ , so kann man  $F_{-1,-1}$  bestimmen, und es ergibt sich:

$$(III) \quad \begin{cases} \Sigma(u + x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_\lambda})^{\lambda-1} (v + x_{\beta_1} + \dots + x_{\beta_\mu})^{\mu-1} \\ \quad = (u + v + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{n-1} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right). \end{cases}$$

Setzt man  $u + v + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$  und bezeichnet die elementar-symmetrischen Funktionen von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , so erhält man:

$$(IV) \quad \begin{cases} \Sigma(u + x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_\lambda})^\lambda (v + x_{\beta_1} + \cdots + x_{\beta_\mu})^\mu \\ = s^n + \underline{1}f_1 s^{n-1} + \underline{2}f_2 s^{n-2} + \cdots + \underline{n}f_n. \end{cases}$$

Reviewer: [Weltzien, Prof. \(Zehlendorf\)](#)

Cited in **1** Review  
Cited in **16** Documents

**Full Text:** [DOI](#)

### References:

- [1] S. Mathematische Annalen, Bd. 39, S. 1 ff.
- [2] Abel, Oeuvres complètes, nouvelle édition, vol. I, p 102. · [Zbl 13.0020.01](#)

This reference list is based on information provided by the publisher or from digital mathematics libraries. Its items are heuristically matched to zbMATH identifiers and may contain data conversion errors. It attempts to reflect the references listed in the original paper as accurately as possible without claiming the completeness or perfect precision of the matching.