zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Hurwitz, A.

Über die *Fourier*schen Konstanten integrierbarer Funktionen. (German) JFM 34.0414.01

Math. Ann. 57, 425-446 (1903).

Es bezeichne $f(x)$ eine in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ integrierbare Funktion, d. h. eine Funktion, bei der die obere und die untere Grenze der Funktionswerte endlich sind und, wenn σ und ε zwei gegebene, beliebig kleine positive Größen bedeuten, sich eine Teilung des Intervalls in n Stücke $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_n$ $(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n = 2\pi)$ angeben läßt, so daß die Summe derjenigen Stücke, in denen die Schwankung von $f(x)$ größer als σ ist, kleiner als ε ausfällt. Durchläuft dann k alle ganzen Zahlen, so definieren die Gleichungen

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, \quad a'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$$

ein System von unendlich vielen Konstanten a_k, a'_k, die durch die Funktion $f(x)$ eindeutig bestimmt sind, und die Hurwitz die *Fourier*schen Konstanten der Funktion $f(x)$ nennt. Der Zusammenhang zwischen $f(x)$ und den zugehörigen *Fourier*schen Konstanten läßt sich auch durch die Äquivalenz:

$$\text{(F)} \quad f(x) \sim \tfrac{1}{2}\,a_0 + a_1\cos x + a'_1 \sin x + a_2\cos 2x + a'_2\sin 2x + \cdots$$

ausdrücken, die für diejenigen Werte von x, für die die Reihe rechts konvergiert und $f(x)$ darstellt, in eine Gleichung übergeht. Da die Gültigkeit der *Fourier*schen Reihen beschränkt, der Begriff der *Fourier*schen Konstanten aber für jede integrierbare Funktion anwendbar ist, macht *Hurwitz* den Vorschlag, an die Stelle der Theorie der *Fourier*schen Reihen die umfassendere Theorie der *Fourier*schen Konstanten zu setzen.

Für das Rechnen mit Äquivalenzen gelten folgende Sätze. Man darf zwei Äquivalenzen addieren und subtrahieren, d. h. aus

$$\begin{aligned} &\text{(F)} \qquad f(x) \sim \tfrac{1}{2}\,a_0 + a_1\cos x + a'_1\sin x + a_2\cos 2x + a'_2\sin 2x + \cdots, \\ &\text{(G)} \qquad g(x) \sim \tfrac{1}{2}\,b_0 + b_1\cos x + b'_1\sin x + b_2\cos 2x + b'_2\sin 2x + \cdots \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) \sim \tfrac{1}{2}(a_0 \pm b_0) &+ (a_1 \pm b_1)\cos x + (a'_1 \pm b'_1)\sin x \\ &+ (a_2 \pm b_2)\cos 2x + (a'_2 \pm b'_2)\sin 2x + \cdots \end{aligned}$$

Die Frage nach den *Fourier*schen Konstanten für $f(x)\cdot g(x)$ läßt sich leicht erledigen, sobald der Wert von

$$\tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

durch die *Fourier*schen Konstanten für $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt ist. Dies geschieht durch den "Fundamentalsatz":

Aus den Äquivalenzen (F) und (G) folgt die Gleichung

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \tfrac{1}{2}a_0b_0 + (a_1b_1 + a'_1b'_1) + \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (a_kb_k + a'_kb'_k) + \cdots \end{cases}$$

Die Formel (P) ist für *Fourier*sche Reihen schon von *Parseval* angegeben worden (Sav. étr. t. I. 1806); sie findet sich auch in *Dirichlet*s Vorlesungen über bestimmte Integrale. Daß sie unter alleiniger Voraussetzung der Integrierbarkeit von $f(x)$ und $g(x)$, also ganz unabhängig von dem Verhalten der diesen Funktionen entsprechenden *Fourier*schen Reihen gilt, scheint zuerst *Liapunoff* (1896) bemerkt zu haben. Unabhängig von ihm hat dann *Hurwitz* 1901 den Fundamentalsatz ausgesprochen (F. d. M. 32, 270, 1901, JFM 32.0270.01) und 1902 (F. d. M. 33, 599 bis 602, 1902, JFM 33.0599.02) den ersten Beweis dafür gegeben. Dieser war jedoch recht verwickelt. In der vorliegenden Abhandlung findet man einen neuen,

Edited by FIZ Karlsruhe, the European Mathematical Society and the Heidelberg Academy of Sciences and Humanities
© 2021 FIZ Karlsruhe GmbH

einfacheren Beweis, der sich auf eine Idee von *Fejér* stützt (F. d. M. 31, 400, 1900, JFM 31.0400.01*) [*) Der Verf. wird dort irrtümlich Tejer genannt.]), die darin besteht, die sukzessiven arithmetischen Mittel der Summenglieder einer *Fourier*schen Reihe in Betracht zu ziehen.

Aus dem Fundamentalsatze ergibt sich für die bestimmte Integration der Äquivalenzen das Theorem: Sind x_0 und x_1 zwei Werte von x im Intervall $0\dots 2\pi$, so folgt aus der Äquivalenz (F) die Gleichung:

$$\text{(J)} \qquad \left\{ \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \right.$$

$$\text{(J)} \qquad \begin{cases} = \frac{1}{2}a_0(x_1 - x_0) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k}(\sin kx_1 - \sin kx_0) - \frac{a'_k}{k}(\cos kx_1 - \cos kx_0) \right], \end{cases}$$

d. h. man darf eine Äquivalenz gliedweise integrieren. Die Gleichung (J) läßt sofort erkennen, daß das Integral einer integrierbaren Funktion immer in eine *Fourier*sche Reihe entwickelbar ist.

Etwas anders verhält es sich mit der unbestimmten Integration von Äquivalenzen. Ist $\varphi(x)$ das unbestimmte Integral der integrierbaren Funktion $f(x)$ und

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\, A_0 + A_1 \cos x + A'_1 \sin x + A_2 \cos 2x + A'_2 \sin 2x + \cdots$$

ihre *Fourier*sche Entwicklung, so ist

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(kA'_k + a_0) \cos kx - kA_k \sin kx]\,,$$

unter a_0 die Konstante

$$a_0 = \tfrac{1}{\pi}\, (\varphi(2\pi) - \varphi(0))$$

verstanden. Durch gliedweise Integration erhält man daher nur dann das richtige Ergebnis, wenn $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ ist.

Von großem Interesse ist die Frage, in wie weit umgekehrt eine im Intervall $0\dots 2\pi$ integrierbare Funktion durch die Werte ihrer *Fourier*schen Konstanten bestimmt ist. Es zeigt sich, daß die Funktion im Intervalle $0\dots 2\pi$ nur bis auf eine additive "Funktion vom Integrale Null" bestimmt ist, d. h. bis auf eine Funktion $f(x)$, für die jedes Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \quad (0 \leqq x_0 < x_1 \leqq 2\pi)$$

verschwindet. Eine in dem Intervall $0\dots 2\pi$ integrierbare Funktion ist aber eine "Funktion vom Integrale Null" im Intervalle $0\dots 2\pi$ dann und nur dann, wenn ihre Nullstellen in ihm überall dicht liegen.

Zum Schluß untersucht *Hurwitz* die Eigenschaften von Funktionen, bei denen nicht alle *Fourier*schen Konstanten verschwinden, wie bei den Funktionen vom Integrale Null, sondern nur einige. Bezeichnet k den ersten Index, für welchen a_k und a'_k nicht beide Null sind, so zeigt sich, daß die Anzahl der Strecken konstanten Vorzeichens der Funktion $f(x)$ im Intervall $0\dots 2\pi$ mindestens $2k$ ist. Die Zahl $2k$ ist dabei die genaue untere Grenze, d. h. es gibt unter den Funktionen, die den angegebenen Bedingungen genügen, stets solche, bei denen die Anzahl der Strecken konstanten Zeichens gleich $2k$ ist; man erhält sie aus Theorie der Kugelfunktionen.

Dem Referenten würde es aussichtsvoll erscheinen, wenn man versuchen wollte, auch für Entwickelungen nach anderen oszillierenden Funktionen eine Theorie der zugehörigen Konstanten aufzubauen.

Reviewer: Stäckel, Prof. (Hannover)

Cited in **4** Reviews
Cited in **19** Documents

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Man vgl. etwa Dini, Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse (Deutsch von Lüroth und Schepp. Leipzig 1892). Pasch, Ueber einige Punkte der Funktionentheorie, (diese Annalen Bd. 30, S. 132).

[2] Daß es sich dabei nur um Entwickelungen handelt, die ausschließlich Cosinusglieder enthalten, ist unwesentlich. Dem Berichte von H. Burkhardt über Reihenentwickelungen nach oscillierenden Funktionen (Leipzig 1903) entnehme ich das genauere Zitat: M. A. Parseval, sav. étr. t.1, 1806.

[3] Vgl. die Note: Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes Rendus, 10 décembre 1900. Eine ausführliche Darstellung seiner Untersuchungen hat Herr Fejér unter dem Titel ?Vizgalatok A Fourier-Fele Sorok Körébol? in ungarischer Sprache veröffentlicht. (Budapest 1902.)

[4] Vgl. Harnack, Über die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Funktionen. (Diese Annalen Bd.17, S. 125.)

[5] Siehe z. B. Borel, Leçons sur les séries divergentès, p. 93 (Paris, 1901).

[6] Vgl. C. Jordan, Cours d'Analyse, t. I, 68 und t. II, 211.

[7] Pasch, a. a. O. Ueber einige Punkte der Funktionentheorie, (diese Annalen Bd. 30, S. 151).

[8] Vgl. die obigen Zitate.

[9] Liouville's Journal, Bd. I.

[10] Handbuch der Kugelfunktionen (Berlin 1878) Bd. I, Seite 89.

This reference list is based on information provided by the publisher or from digital mathematics libraries. Its items are heuristically matched to zbMATH identifiers and may contain data conversion errors. It attempts to reflect the references listed in the original paper as accurately as possible without claiming the completeness or perfect precision of the matching.