Fischer, E.

Two new proofs of the "fundamental theorem on Fourier coefficients". (Zwei neue Beweise für den "Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten".) (German) JFM 35.0399.02

Monatsh. f. Math. 15, 69-92 (1904).

Es handelt sich um die von Ljapunoff, Ch. de la Vallée Poussin und Hurwitz entdeckte Formel:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)f(x)dx = \frac{1}{2}a_0^2 + (a_1^2+b_1^2) + \cdots + (a_k^2+b_k^2) + \cdots$$

in der a_0, a_1, ...; b_0, b_1, ... die Fourierschen Konstanten von $f(x)$ bedeuten (vgl. F. d. M. 32, 270, 1901, JFM 32.0270.01; 33, 599, 1902, JFM 33.0599.02; 34, 414-417, 1903, JFM 34.0414.01). Diese Formel ist längst bekannt und leicht zu beweisen, wenn sich $f(x)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln läßt.

Bildet man aus der integrierbaren Funktion $f(x)$ den "Mittelwert":

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)dy,$$

so ist in allen Stetigkeitspunkten x von $f(x)$:

$$\lim_{\delta=0} F_\delta(x) = f(x).$$

Hierauf gründet sich die Vermutung, daß auch

$$\lim_{\delta=0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F_\delta(x)F_\delta(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)f(x)dx$$

sei. Nun gilt aber für das Integral links, da $F_\delta(x)$ sich in eine Fouriersche Reihe entwickeln läßt, der Fundamentalsatz, und hieraus ergibt sich durch den Grenzübergang $\lim\limits_{\delta=0}$ der erste der beiden neuen Beweise (Mittelwertbeweis).

Bei dem zweiten benutzt der Verf. das Poissonsche Integral

$$u_r(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(y)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(y-x)+r^2}dy,$$

das die Eigenschaft besitzt, an allen Stetigkeitsstellen x von $f(x)$

$$\lim_{r=0} u_r(x) = f(x)$$

zu ergeben. Hierauf gründet sich wieder die Vermutung, daß

$$\lim_{r=0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u_r(x)u_r(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)f(x)dx$$

sei, wo das Integral links die in eine Fouriersche Reihe entwickelbare Funktion $u_r(x)$ enthält. Durch Grenzübergang $\lim\limits_{r=0}$ ergibt sich der zweite Beweis, den der Verf. als Potentialbeweis bezeichnet, weil man $u_r(x)$ als Potentialfunktion in den Polarkoordinaten r und x auffassen kann.

Die Abhandlung zeichnet sich durch die klare Darstellung des Gegenstandes aus und wird als Einführung in diese interessante Bereicherung der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen mit Nutzen gebraucht werden können.

Reviewer: Stäckel, Prof. (Hannover)

MSC:

Keywords:

Fourier coefficients; Parseval's theorem; Poisson kernel

Full Text: DOI

References:

[1] Eine Funktion heißt "durchweg endlich" wenn sie für jeden einzelnen endlichen (reellen) Wert der Variablenx einen bestimmten endlichen (reellen) Funktionswert besitzt. Sie heißt "begrenzt", wenn die Gesamtheit dieser Funktionswerte eine endliche obere sowie eine endliche untere Grenze hat.

[2] Journal f. Math. Bd. 74=ges. math. Abh. II. p. 175; vgl. Weierstraß, Werke I, p. 60.

[3] Journal f. Mathem. Bd. 89.

[4] Vgl. hiezu Harnack l. c., Hurwitz l. c.

[5] Vgl. wieder Hurwitz l. c. {\S} 8.

[6] Vgl. z. B. C. Jordan, cours d'analyse, 2. éd. t.I. 36.

[7] Wenn umgekehrt eine endliche und begrenzte Funktionf(x) die Eigenschaft hat, daß die MengeM {\(\epsilon\)} der Stellen eines endlichen Intervalles an denen |f(x)|, für jedes >0 die äußere Läunge Null besitzt, dann istf(x) integrierbar über dieses Intervall und gehört in dieselbe Klasse wie die Funktion Null. – Aus dem Umstande, daßM für jedes >0 die äußere Länge Null hat, folgt natürlich keineswegs, daß auch die MengeM der Stellen desselben endlischen Intervalles, an denen |f(x)|>0, die äußere Länge Null besitzt, wie man dies nach einer merkwürdigen Stelle bei Harnack, Math. Ann.17 p. 132, anzunehmen versucht sein könnte; z. B. Kann es vorkommen, daß jedeM aus jedem enclichen Intervalle nur endlich viele Punkte enthält, währenM überalldicht ist. Beispiele sind leicht zu bilden, da (nach dem Gesagten) die Integrierbarkeit keinerlei besondere Vorkehrung erheischt.

[8] Vgl. unten Kap.II, {\S} 2a.

[9] Diese besondere Voraussetzung kann nach Harnack l. c. vermieden werden.

[10] Dieser Hilfssatz hat lediglich ökonomischen Zweck. Will man ohne ihn auslangen, so hat man in jedem einzelnen Falle der Anwendung eine Betrachtung vorzunehmen, welche dem Teile II des Beweises entspricht. (Z. B. Hurwitz l. c. p. 433, 434.)

[11] Bei Hurwitz (l. c. {\S} 7) erscheiint der obige Beweis in fortgebildeter Gestalt: die Entwickelbarkeit der Funktion {\(\pi\)} (x) braucht da nicht benutzt zu werden, weil der Fundamentalsatz bereits in seiner allgemeinn Fassung zur Verfügung steht.

[12] C. Jordan, cours d'analyse, 2. éd.; comptes rendus 1881.

[13] Hurwitz l. c. {\S} 7. – ie Gleichmäßigkeit der Konvergenz wird bei Jordan berücksichtigt.

[14] Journal f. Math. Bd. 63.

[15] Riemanns Habilitationsarbeit {\S} 10.

[16] Ein besonderer Nachweis für die Integrierbarkeit der GrößeH in bezug auf {\(\alpha\)} ist keineswegs erforderlich; übrigens wird sich weiterhin sofort zeigen, daßH in bezun auf {\(\alpha\)} sogar stetig ist.

[17] Man kann in dem hier angewendeten Verfahren eine Verallgemeinerung der partiellen Integration erblicken, wie sie schon von Dini (Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe, {\S} 266) entwickelt wurde. Dini beruft sich jedoch nicht auf die Theorie der Doppelintegrale, sondern stellt eigene Grenzbetrachtungen an.

[18] Man wird bemerken, daß daselbst zwar die Reihenentwicklung der Funktion {\(\phi\)} (x) nicht gerade als Fouriersche vorausgesetzt zu werden braucht, daß jedoch diea x ,b x die wirklichen Fourierschen Konstanten der Funktionf(x) sein müssen.

[19] Ges. Abhandl. II p. 360.

[20] Infolge des Umstandes, daß die Reihenglieder positiv sind, erscheint eine Berufung auf den bezüglichen allgemeinen Satz von Abel entbehrlich.