Hilbert, D.

Basis of a general theory of linear integral equations (Second communication). (Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Zweite Mitteilung.).) (German)

JFM 35.0378.03
Gött. Nachr. 1904, 213-259 (1904).

Hilbert hatte am Schlusse seines Vortrages auf dem II. internationalen Mathematiker-Kongresse zu Paris die Frage aufgeworfen, ob der Mathematik bevorstehe, was anderen Wissenschaften längst widerfahren sei, daß sie sich nämlich in einzelne Teilwissenschaften auflöst, deren Vertreter noch einander kaum verstehen, und deren Zusammenhang daher immer loser wird, und hatte der Überzeugung Ausdruck gegeben, daß mit der Ausdehnung der Mathematik ihr einheitlicher Charakter nicht verloren gehen, sondern sich nur deutlicher offenbaren werde. Denn jeder wirkliche Fortschritt der mathematischen Wissenschaften gehe stets Hand in Hand mit der Auffindung schärferer Hülfsmittel und einfacherer Methoden, die zugleich das Verständnis früherer Theorien erleichtern und umständliche ältere Entwicklungen beseitigen, so daß es dem Mathematiker leichter gelingen wird, sich in den verschiedenen Zweigen seiner Wissenschaft zu orientieren, als dies für irgendeine andere Wissenschaft der Fall ist.

Dieses Programm der "schärferen Hülfsmittel und einfacheren Methoden" charakterisiert vortrefflich Hilberts eigene Forschungsart, wie sie in der algebraischen Invariantentheorie, in der Lehre von den algebraischen Zahlkörpern, in der Variationsrechnung in Erscheinung getreten ist. Seine neuen Veröffentlichungen (auch JFM 35.0378.02) über lineare Integralgleichungen sind ein weiterer bedeutungsvoller Schritt in derselben Richtung; denn der systematische Aufbau einer Theorie der linearen Integralgleichungen erweist sich als höchst fruchtbar für die gesamte Analysis, insbesondere für die Theorie der bestimmten Integrale, die Theorie der Entwicklung willkürlicher Funktionen in unendliche Reihen, die Theorie der linearen Differentialgleichungen, die Potentialtheorie und die Variationsrechnung.

Bestimmungsgleichungen, in denen die zu ermittelnde Funktion als des Integranden unter einem bestimmten Integral vorkommt, trifft man in der Analysis nicht selten an; schon Gauß wurde durch die Randwertaufgabe der Potentialtheorie auf eine solche Gleichung geführt. Für Gleichungen der Form

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) + g(s)\cdot\varphi(s), \tag{1}$$

in der $K(s,t)$, $f(s)$ und $g(s)$ gegebene Funktionen der reellen Veränderlichen s und t bedeuten, während die Funktion $\varphi(s)$ gesucht wird, hat P. du Bois-Reymond (F. d. M. 20, 387, 1888, JFM 20.0387.01) den Namen Integralgleichungen vorgeschlagen. "Die Behandlung solcher Gleichungen", sagt er, "scheint für die heutige Analysis unübersteigliche Schwierigkeiten darzubieten." Selten ist eine Prophezeiung so schlecht in Erfüllung gegangen, wie diese!

Die von Hilbert behandelten "linearen Integralgleichungen" sind besondere Fälle der Gleichung (1). Bei denselben Bezeichnungen wie dort nennt er

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{2}$$

eine Integralgleichung erster Art und

$$\varphi(s) - \lambda\cdot\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{3}$$

eine Integralgleichung zweiter Art; λ bedeutet einen Parameter. Die Funktion $K(s,t)$ heißt der Kern der Integralgleichung.

Die erste Methode zur Auflösung der Integralgleichungen zweiter Art rührt von C. Neumann her (F. d. M. 19, 1029-1033, 1887, JFM 19.1029.01), der die Funktion $\varphi(s)$ in Form einer unendlichen Reihe darstellte, die nach Potenzen von λ fortschreitet, und deren Koeffizienten gewisse, durch mehrfache Integrale definierte Funktionen von s sind. Eine zweite Methode gab J. Fredholm (F. d. M. 33, 396, JFM

33.0396.06, 1902; 34, 422, 1903, JFM 34.0422.02), bei dem $\varphi(s)$ als ein Bruch erscheint, dessen Zähler eine beständig konvergente Potenzreihe in λ mit von s abhängigen Koeffizienten ist, während im Nenner eine in λ beständig konvergente Potenzreihe mit numerischen Koeffizienten auftritt. Den Nachweis der Übereinstimmung beider Darstellungen hat auf Hilberts Veranlassung O. Kellogg erbracht (F. d. M. 33, 312, 1902, JFM 33.0312.03). In dem besonderen Falle gewisser Randwertaufgaben der Potentialtheorie hat H. Poincaré als erster den Parameter λ eingeführt (bei C. Neumann ist $\lambda = 1$), und er ist dabei zu den "harmonischen Funktionen $P_k(x, y, z)$" gelangt, die bei Hilbert als ein besonderer Fall der zu einer Integralgleichung zweiter Art gehörigen "Eigenfunktionen" erscheinen (F. d. M. 22, 977, 1890, JFM 22.0977.03; 25, 1526-1532, 1894, JFM 25.1526.01; vgl. jedoch schon H. Weber, F. d. M. 2, 217, 1869, JFM 02.0217.01).

Es sei gestattet, hier auf einen bedauerlichen Mangel in der neueren mathematischen Terminologie aufmerksam zu machen. Sir W. Thomsen (Lord Kelvin) hatte in seinem Treatise, 1867, die Sinusschwingungen harmonische Schwingungen und dementsprechend die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + ku = 0,$$

in der k eine von Null verschiedene Konstante bedeutet, harmonische Funktionen der Veränderlichen x genannt. Dieser Entstehung der Benennung folgend, sollte man nur die Funktionen, die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + ku = 0 \qquad (k \neq 0)$$

genügen, als harmonische Funktionen von x, y, z bezeichnen. Es ist ein Mißbrauch und irreführend, wenn französische Autoren neuerdings auch den Funktionen, die der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

genügen, den Namen harmonische Funktionen geben; vgl. Picard, Traité, t. II, S. 7.

Mit dem Beweise für die Existenz der fonctions harmoniques und dem Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen nach ihnen haben sich zahlreiche Forscher beschäftigt (E. le Roy, F. d. M. 29, 782, 1898, JFM 29.0782.02; S. Zaremba, F. d. M. 30, 373, 1899, JFM 30.0373.01 u. 31, 419, 1900, JFM 31.0419.01; W. Stekloff, F. d. M. 31, 733; 1900, JFM 31.0733.02; A. Korn, F. d. M. 32, 770, 1901, JFM 32.0770.10 usw.); ihre wesentlichen Ergebnisse sind in Hilberts allgemeinen Sätzen enthalten. Endlich sind noch die Arbeiten von V. Volterra zu erwähnen, dem man die Auflösung besonderer Integralgleichungen verdankt (F. d. M. 27, 309-310, 1896, JFM 27.0309.03; 28, 366-376, 1897, JFM 28.0366.02).

In den beiden vorliegenden Mitteilungen beschäftigt sich Hilbert mit den Integralgleichungen zweiter Art, die einen symmetrischen Kern besitzen, d. h. bei denen $K(s, t)$ identisch gleich $K(t, s)$ ist; der Einfachheit halber wird noch $a = 0$, $b = 1$ gesetzt.

Den Ausgangspunkt bildet das algebraische Problem, daß aus den n Gleichungen

$$\begin{cases} \varphi()pn - l \left[K\left(\frac{p}{n}, \frac{1}{n}\right) \varphi()1n + K\left(\frac{p}{n}, \frac{2}{n}\right) \varphi()2n + \cdots \right. \\ \qquad \left. + K\left(\frac{p}{n}, \frac{n}{n}\right) \varphi()nn \right] = f()pn \quad (p = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \tag{4}$$

die n Unbekannten $\varphi()pn$ ermittelt werden sollen; wenn die Werte $f()pn$ und $K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$ gegeben sind; l bedeutet einen Parameter. Dieses Problem läßt sich lösen, sobald die Determinante $d(l)$ der quadratischen Form:

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 - l \cdot \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} K\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) x_p x_q$$

von Null verschieden ist, und zwar ergeben sich die Werte der $\varphi()pn$ als die Koeffizienten der y_p in einer Linearform der y_1, ..., y_n:

$$-D\left(l, \frac{f}{y}\right) : d(l),$$

wo das Symbol $D\left(l, \frac{f}{y}\right)$ die mit 0, x_1, ..., x_n oben und 0, y_1, ..., y_n links geränderte Determinante $d(l)$ bezeichnet.

Die Gleichung $d(l) = 0$ besitzt bekanntlich n reelle Wurzeln, von denen im folgenden vorausgesetzt wird, daß sie voneinander verschieden sind. Ist l gleich einer dieser Wurzeln, so haben die Gleichungen (4) keine Lösungen mehr, aber die daraus entstehenden homogenen Gleichungen, bei denen Null an die Stelle der $f()pn$ getreten ist, besitzen dann ein Lösungssystem, bei dem die $\varphi()pn$ bis auf einen allen gemeinsamen Faktor eindeutig bestimmt sind.

Indem man jetzt zur Grenze für $n = \infty$ übergeht, gewinnt man die Lösung des transzendenten Problems, die Integralgleichung zweiter Art

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt = f(s) \tag{3*}$$

aufzulösen, und zwar ergeben sich die Formeln von Fredholm. Der Grundgedanke, von einem algebraischen Probleme auszugehen und durch einen Grenzübergang zur Lösung des transzendenten Problems zu gelangen, ist als heuristisches Hülfsmittel häufig herangezogen worden. Hilbert, der ihn zu einem Beweisprinzip ausgestaltet hat, erwähnt dafür Lord Rayleigh, aber schon Lagrange hat die Bestimmung der Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe in dieser Weise ausgeführt (Miscellanea Taurinensia, t. I, 1759).

Bei dem Grenzübergange konvergiert zunächst $d\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ mit wachsendem n gegen eine beständig konvergente Potenzreihe $\delta(\lambda)$, die mit dem Nenner von Fredholm identisch ist; die Konvergenz ist gleichmäßig für alle Werte von λ, deren absoluter Wert unter einer beliebig anzunehmenden Zahl $\mathit{\Lambda}$ liegt. Sind ferner in dem Intervalle von 0 bis 1 $x(r)$ und $y(r)$ zwei willkürliche stetige Funktionen der reellen Variable r und setzt man

$$x_p = x()pn, \quad y_p = y()pn,$$

so geht

$$\frac{1}{n} D\left(\frac{\lambda}{n}, \frac{x}{y}\right)$$

in der Grenze in eine beständig konvergente Potenzreihe $\mathit{\Delta}\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)$ von λ über, deren Koeffizienten von der Wahl der willkürlichen Funktionen $x(r)$ und $y(r)$ abhängen; der Übergang ist wieder gleichmäßig für alle Werte von λ, deren absoluter Wert unter einer beliebig anzunehmenden Zahl $\mathit{\Lambda}$ liegt.

Wird mit $D\left(l, \frac{x}{Ky}\right)$ die Determinante bezeichnet, die aus $D\left(l, \frac{x}{y}\right)$ entsteht, indem darin allgemein $y()pn$ durch

$$K\left(\frac{p}{n}, \frac{1}{n}\right) y()1n + K\left(\frac{p}{n}, \frac{2}{n}\right) y()2n + \cdots + K\left(\frac{p}{n}, \frac{n}{n}\right) y()nn$$

ersetzt wird, so besteht die Identität in x, y, t:

$$d(l)(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + D\left(l, \frac{x}{y}\right) - lD\left(l, \frac{x}{Ky}\right) = 0.$$

Setzt man darin $l = \frac{\lambda}{n}$ und dividiert durch n, so liefert der Grenzübergang die Formel:

$$\delta(\lambda)\int_0^1 x(\alpha)y(\alpha)d\alpha + \mathit{\Delta}\left(\lambda, \frac{x}{y}\right) - \lambda\int_0^1 \left[\mathit{\Delta}\left(\lambda, \frac{x}{y^*}\right)\right]_{y^*(r)=K(r,\beta)} y(\beta)d\beta = 0,$$

die identisch in λ besteht.

Setzt man in dieser Formel

$$x(r) = K(r,s) \text{ und } y(r) = K(r,t)$$

und benutzt die Abkürzungen

$$\mathit{\Delta}(\lambda; s,t) = \lambda\left[\mathit{\Delta}\left(\lambda, \frac{x}{y}\right)\right]_{\substack{x(r) = K(r,s)\\ y(r) = K(r,t)}} - \delta(\lambda)K(s,t),$$

$$K(s,t) = -\frac{\Delta(\lambda; s,t)}{\delta(\lambda)},$$

so erhält man die Identität in s, t und λ:

$$K(s,t) = K(s,t) - \lambda \int_0^1 K(s,\beta)K(t,\beta)d\beta.$$

Die Funktion $K(s,t)$ heißt die lösende Funktion für den Kern $K(s,t)$, denn aus ihr ergibt sich die Lösung der Integralgleichung (3*) in der eleganten Gestalt:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 K(s,t)f(t)dt.$$

Zu gleicher Zeit erkennt man hieraus die Eindeutigkeit der Auflösung der Integralgleichung zweiter Art für solche λ, die nicht Nullstellen von $\delta(\lambda)$ sind.

Die Wurzeln der Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ nennt Hilbert die zu dem Kern $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte. Er zeigt, daß die Eigenwerte stets reell und in unendlicher Anzahl vorhanden sind, es sei denn, daß $K(s,t)$ als eine endliche Summe von Produkten darstellbar ist, deren Faktoren nur von je einer der Variabeln s und t abhängen; tritt dieser Fall ein, so ist die Anzahl der Eigenwerte gleich der Anzahl der Summanden in jener Summe und $\delta(\lambda)$ eine ganze rationale Funktion von einem Grade gleich dieser Anzahl.

Bei den folgenden Untersuchungen wird der Einfachheit halber angenommen, daß die Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln habe; der Fall mehrfacher Wurzeln wird nachträglich, am Ende der Mitteilung, erledigt.

Den Eigenwerten $\lambda^{(h)}$ werden Eigenfunktionen $\varphi^{(h)}(s)$ zugeordnet, nämlich stetige Funktionen der reellen Veränderlichen s, die durch die Gleichungen

$$\varphi^{(h)}(s) = \left|\sqrt{\frac{\lambda^{(h)}}{\Delta(\lambda^{(h)}; s^*, s^*)}}\right| \cdot \Delta(\lambda^{(h)}; s, s^*)$$

definiert werden; dabei ist der Wert s^* so zu wählen, daß der Nenner von Null verschieden ausfällt; das ist stets möglich, wenn die Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln hat. Die Eigenfunktionen haben die Eigenschaft, daß

$$\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\varphi^{(k)}(s)ds = \begin{cases} \pm\lambda^{(h)}\delta'(\lambda^{(h)}) & (h = k) \\ 0 & (h \neq k) \end{cases}$$

ist. Es werden daher neben ihnen die normierten Eigenfunktionen

$$\psi^{(h)}(s) = \frac{\varphi^{(h)}(s)}{\left|\sqrt{\int_0^1 \varphi^{(h)}(s)\varphi^{(h)}(s)ds}\right|}$$

eingeführt, bei denen

$$\int_0^1 \psi^{(h)}(s)\psi^{(k)}(s)ds = \begin{cases} 1 & (h = k) \\ 0 & (h \neq k) \end{cases}$$

wird.

Die Übertragung der algebraischen Untersuchungen, die die Transformation der bilinearen Form

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} K\left(\frac{p}{n}\frac{q}{n}\right) x_p y_q$$

betreffen, auf das transzendente Gebiet, führt alsdann zu der Formel:

$$\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(x)y(t)dsdt = \frac{1}{\lambda^{(1)}}\int_0^1 \psi^{(1)}(s)x(s)ds \cdot \int_0^1 \psi^{(1)}(s)y(s)ds$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_0^1 \psi^{(2)}(s)x(s)ds \cdot \int_0^1 \psi^{(2)}(s)y(s)ds + \cdots,$$

in der die Reihe rechter Hand für alle stetigen Funktionen $x(s)$ und $y(s)$, bei denen die Integrale

$$\int_0^1 x(s)x(s)ds, \quad \int_0^1 y(s)y(s)ds$$

unter einer festen Grenze bleiben, absolut und gleichmäßig konvergiert. Hieraus folgt, daß die Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ und die Eigenfunktionen $\psi^{(h)}(s)$ umgekehrt in ihrer Gesamtheit den Kern $K(s,t)$ vollständig bestimmen.

Es ist hervorzuheben, daß das soeben angegebene allgemeine Entwicklungstheorem bewiesen wird, ohne daß die Frage nach der Existenz der Eigenwerte schon entschieden ist, vielmehr beruht der Beweis für die Existenz der Eigenwerte umgekehrt auf der Anwendung dieses Theorems. Gerade hierin liegt die entscheidende Wendung; denn wenn man damit beginnt, die Existenz der Eigenwerte nachweisen zu wollen, stößt man auf unübersteigliche Hindernisse.

Auf Grund des allgemeinen Entwicklungstheorems läßt sich jetzt die Lehre von der Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe mit großer Leichtigkeit aufbauen; dabei ist besonders bemerkenswert, daß die Konvergenzbeweise, die sonst so große Schwierigkeiten bereiten, sich hier sozusagen von selbst erledigen. Die so erhaltenen Entwicklungen umfassen die bekannten Entwicklungen nach trigonometrischen, Besselschen, Laméschen und Sturm-Liouvilleschen Funktionen und lassen sich ohne Mühe auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen, so daß man im besonderen auch die Poincaréschen Entwicklungen nach harmonischen Funktionen erhält. Es möge genügen, von den Sätzen, die Hilbert beweist, den folgenden sehr allgemeinen anzuführen:

Wenn eine Funktion $f(s)$ sich in der Gestalt:

$$f(s) = \int_0^1 \int_0^1 K(r,t)K(s,t)h(r)drdt$$

darstellen läßt, wo $h(r)$ eine stetige Funktion von r ist, so läßt sich $f(s)$ auf die Fouriersche Weise in eine nach Eigenfunktionen fortschreitende Reihe

$$f(s) = c_1\psi^{(1)}(s) + c_2\psi^{(2)}(s) + \cdots, \text{ wo } c_m = \int_0^1 f(s)\psi^{(m)}(s)ds,$$

entwickeln. Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Die algebraische Frage nach den relativen Extremen einer quadratischen Form bei Konstanz einer zweiten quadratischen Form führt auf das transzendente Problem, diejenigen Funktionen $x(s)$ zu finden, für die das Doppelintegral

$$J(x) = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)x(s)x(t)dsdt$$

ein Extremum ist, während die Nebenbedingung

$$\int_0^1 x(s)x(s)ds = 1$$

erfüllt ist. Für den Fall, daß der symmetrische Kern definit ist, d. h. daß das Integral $J(x)$ nur positive Werte besitzt, wie auch die stetige Funktion $x(s)$ gewählt werde, und nur Null, wenn $x(s) = 0$ ist, gibt es keine stetige Funktion $x(s)$, die, während die Nebenbedingung erfüllt ist, $J(x)$ zu einem Minimum macht; das Maximum aber erhält man für $x(s) = \psi^{(1)}(s)$; es ist gleich $1 : \lambda^{(1)}$.

Den Schluß der ersten Mitteilung bilden Ergänzungen und Erweiterungen; es wird nämlich zugelassen, daß der Kern $K(s,t)$, der bisher eine stetige Funktion von s und t sein sollte, Unstetigkeiten besitzt, und nachgewiesen, daß bei geeigneten Voraussetzungen über die Art dieser Singularitäten die vorher erhaltenen Ergebnisse bestehen bleiben. Ebenso werden die Abänderungen ermittelt, die die Theorie erfährt, wenn die Gleichung $\delta(\lambda) = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt. Zu einem mehrfachen Eigenwerte gehören mehrere Eigenfunktionen, deren Ermittlung keine prinzipiellen Schwierigkeiten hat.

In der zweiten Mitteilung werden Anwendungen auf die Theorie der Differentialgleichungen gemacht.

Es sei die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$D_\lambda(u) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + (q+\lambda)u = 0$$

vorgelegt, in der λ einen Parameter bedeutet, während p und q Funktionen von x sind, die in dem Intervall von a bis b gewissen Bedingungen genügen. Wird nach dem Vorgange von H. Burkhardt (F. d. M. 25, 716, 1894, JFM 25.0716.04) die zu gewissen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $D_0(u)$ als Kern $K(x,\xi)$ genommen, so besitzt die Integralgleichung zweiter Art

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

zur lösenden Funktion die zu den nämlichen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion von $D_\lambda(u)$. Da die lösende Funktion sich in der Form eines Bruches darstellt, dessen Nenner nur für die Eigenwerte des Kernes $\lambda^{(h)}$ verschwindet, so folgt unter der Voraussetzung, daß $D_0(u)$ für die betreffenden Randbedingungen eine Greensche Funktion besitzt, daß es auch stets eine solche für $D_\lambda(u)$ gibt, es sei denn, daß λ ein Eigenwert der Integralgleichung ist. Für $\lambda = \lambda^{(h)}$ aber ist die zugehörige Eigenfunktion $\psi^{(h)}(x)$ ein Integral der Differentialgleichung $D_\lambda(u) = 0$, das die betreffenden Randbedingungen erfüllt; und umgekehrt, besitzt die Differentialgleichung $D_\lambda(u) = 0$ für einen bestimmten Wert von λ ein Integral, das die betreffenden Randbedingungen erfüllt, so ist dieser Wert von λ ein Eigenwert, und das Integral die zugehörige Eigenfunktion des Kernes $K(x,\xi)$; der Differentialausdruck $D_\lambda(u)$ besitzt dann keine Greensche Funktion im ursprünglichen Sinne des Wortes. In Anbetracht dieser Tatsachen werden die Werte $\lambda^{(h)}$ auch als Eigenwerte der Differentialgleichung $D_\lambda(u) = 0$ und jene Lösungen $\psi^{(h)}(x)$ als Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung für die betreffenden Randbedingungen bezeichnet. Alsdann gilt der Satz:

Jede zweimal stetig differenzierbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung $D_\lambda(u)$ fortschreitet; diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Während man so Entwicklungen nach Sturm-Liouvilleschen Funktionen erhält, ergeben sich in entsprechender Weise Entwicklungen nach anderen Funktionen, wenn andere Differentialgleichungen zweiter Ordnung, z. B. die der Besselschen, der Zylinder- und Kugelfunktionen, zugrunde gelegt werden.

Die so gewonnenen Sätze lassen sich sofort auf die partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen übertragen, die entstehen, wenn man zu einem sich selbst adjungierten partiellen Differentialausdruck zweiter Ordnung von elliptischem Typus ein Glied der Form λu hinzufügt, so daß eine Differentialgleichung $E_\lambda(u) = 0$ entsteht, und man findet so den Satz, daß jede zweimal stetig differenzierbare, und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(x,y)$ auf die Fouriersche Weise in eine Reihe entwickelbar ist, die nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung $E_\lambda(u) = 0$ fortschreitet, und daß diese Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Poincarés Entwicklungen nach harmonischen Funktionen, den Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0,$$

sind als besonderer Fall hierin enthalten.

Den Schluß der zweiten Mitteilung bilden Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, bei denen der Parameter λ auch in den Randbedingungen auftritt, wie das z. B. bei den beiden von Poincaré in den Acta math. Band 20 (F. d. M. 27, 316, 1896, JFM 27.0316.01) behandelten Problemen der Fall ist. Man wird dabei auf Integralgleichungen erster Art mit symmetrischem Kern geführt, deren Theorie in der dritten Mitteilung entwickelt werden soll.

Reviewer: Stäckel, Prof. (Hannover)

MSC:

46E05 Lattices of continuous, differentiable or analytic functions

Keywords:

Linear integral equations; Hilbert space; integral kernel; Fredholm theory; ordinary differential equations; partial differential equations; eigenfunction expansions

Full Text: Link EuDML

