Schmidt, Erhard.

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. (German)

JFM 36.0461.03
Göttingen. 33 S. 8° (1905).

Der Verf. knüpft an die bekannten Arbeiten von *Fredholm* und *Hilbert* über die sogenannten linearen Integralgleichungen an, über deren Entstehungsgeschichte man das Referat über *Hilberts* beide Noten in den Gött. Nachr. ("F. d. M. *35*, 378, 1904, siehe JFM 35.0378.02 u. JFM 35.0378.03") vergleiche. Abgesehen von den unten zu erwähnenden Entwicklungstheoremen des vierten Kapitels, die in ihrer Allgemeinheit neu sind, liegt der Schwerpunkt der Arbeit in der Methode, in der besonders einfachen und elementaren Art, wie die wichtigsten Theoreme von *Fredholm* und *Hilbert*, die letzteren teilweise unter Beseitigung einschränkender Voraussetzungen, so bewiesen werden, daß eigentlich nichts als die Begriffe der Stetigkeit, des Integrals, der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz dabei vorausgesetzt sind. Während *Hilbert* in seiner ersten Note von algebraischen Sätzen über lineare Gleichungssysteme ausging und von da aus durch einen gewissen Grenzübergang die analogen Sätze über lineare Integralgleichungen gewann, indem er die Anzahl der Gleichungen wie der Unbekannten unbegrenzt wachsen ließ, benutzt *Schmidt* eine direkte Methode, die in gleicher Weise auf endliche lineare Gleichungssysteme, auf lineare Gleichungssysteme mit abzählbar-unendlichvielen Unbekannten, auf lineare Integralgleichungen u. a. m. angewandt werden kann.

Der "linearen homogenen Integralgleichung"

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt$$

für die unbekannte Funktion $\varphi(s)$ steht – um die eben erwähnte Analogie genauer zu präzisieren – das homogene lineare Gleichungssystem

$$0 = \sum_{q=1}^{n} (\delta_{pq} - \lambda k_{pq}) s_q \quad (p = 1, \dots, n; \delta_{pp} = 1, \delta_{pq} = 0)$$

gegenüber; wie dieses nicht für jeden Wert von λ ein nicht aus lauter Nullen bestehendes Lösungssystem $x_1, \dots, x_n$ besitzt, sondern nur für die Nullstellen der Gleichung n-ten Grades

$$\delta(\lambda) = |\delta_{pq} - \lambda k_{pq}| = 0,$$

so ist auch jene Integralgleichung nur für besondere Werte von λ durch eine stetige Funktion $\varphi(s)$ lösbar, die "Eigenwerte" (*Hilbert*) des (als stetig angenommenen) Kernes $K(s,t)$; die lösenden Funktionen heißen "Eigenfunktionen".

Insonderheit beschäftigt sich *Schmidt* mit denjenigen Integralgleichungen, deren Kern $K(s,t)$ eine stetige reelle symmetrische Funktion ihrer beiden Argumente ist, und die also dem Falle entsprechen, daß die k_{pq} reelle Größen sind, welche der Symmetriebedingung $k_{pq} = k_{qp}$ genügen, d. h. der Theorie der orthogonalen Transformation einer reellen quadratischen Form $\Sigma k_{pq} x_p x_q$ auf eine Summe reeller Quadrate. *Hilbert* hatte diese symmetrischen Integralgleichungen in ihrer besonderen Bedeutung (auch für die Randwertaufgaben der Physik) in den Vordergrund gestellt. Nachdem der Verf. im ersten Kapitel einige Konvergenzhülfssätze vorangeschickt hat, die man zumeist als elementargeometrische Sätze aus der Geometrie im Raume aller stetigen Funktionen ansprechen könnte, zeigt er in § 4, daß sämtliche Eigenwerte reell sind, daß zu jedem Eigenwert höchstens eine endliche Anzahl linear unabhängiger reeller Eigenfunktionen gehören, die man stets so wählen kann, daß sie orthogonal sind. Ein Funktionssystem $f_1(s), f_2(s), \dots$ heißt orthogonal, wenn

$$\int f_p(s) f_q(s) ds = \delta_{pq}$$

ist. Er zeigt dann, daß die Eigenwerte sich nicht im Endlichen häufen können, also der absoluten Größe nach geordnet werden können, und gewinnt so den Begriff des zu dem Kern $K(s,t)$ gehörigen vollständigen, normierten Orthogonalsystems von Eigenfunktionen, indem er die normierten Eigenfunktionen der sukzessiven Eigenwerte sämtlich hintereinanderreiht. Nach diesen Vorbereitungen mehr formaler Art beweist er den dem Fundamentalsatz der Algebra oder genauer dem Satz von der Existenz einer Hauptachse einer reellen Kurve oder Fläche 2. O. analogen Satz, daß (für einen reellen, symmetrischen Kern) stets ein reeller Eigenwert existiert, nach einer der *Bernoulli*schen oder *Graeffe*schen Auflösungsmethode (für algebraische Gleichungen) analogen, einem berühmten Beweise von *H. A. Schwarz* nachgebildeten Methode; sodann das Analogon zur Darstellung einer reellen quadratischen Form als Summe von Quadraten reeller Linearformen, ohne die von *Hilbert* hierfür noch angenommene "Allgemeinheit" des Kerns vorauszusetzen. Damit hat er zugleich das Entwicklungstheorem, daß jede stetige Funktion, die mit Hülfe einer stetigen Funktion $p(t)$ in der Form

$$\int_a^b K(s,t)p(t)dt$$

dargestellt werden kann, nach *Fourier*scher Art in eine nach den Eigenfunktionen des Kernes K fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Die *Fredholm*schen Formeln werden nicht benutzt; vielmehr liefert die unbeschränkte Gültigkeit der Entwicklungssätze für den Fall des symmetrischen Kernes eine neue Auflösungsmethode der inhomogenen linearen Integralgleichung.

Das dritte Kapitel statuiert die Analoga der Sätze über die Darstellung einer Bilinearform $\Sigma k_{pq}x_py_q$ als einer Produktsumme $\sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu(s)\psi_\nu(y)$, wo die φ_ν wie die ψ_ν für sich je ein Orthogonalsystem bilden.

Das vierte Kapitel, das von der übrigen Arbeit nur die Hülfssätze (Kapitel 1) benutzt, giebt Entwicklungstheoreme, die die bekannten Entwicklungen in Polynomen-, *Fourier*- usw.- Reihen unter allgemeine Sätze subsumiert. Es sei $\varphi_1(x), \varphi(2)(x), \dots$ eine unendliche Reihe für $a \leqq x \leqq b$ definierter reeller, zweimal stetig differenzierbarer Funktionen, deren zweite Ableitungen ein abgeschlossenes System bilden, d. h. ein solches, daß es keine von 0 verschiedene stetige Funktion $f(x)$ gibt, welche für jedes ν der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\varphi_\nu''(x)dx = 0$$

genügt; dann läßt sich jede für $a \leqq x \leqq b$ definierte stetige Funktion in eine Reihe endlicher linearer homogener Aggregate der Funktionen $1, x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ gleichmäßig konvergent entwickeln; und jede einmal stetig differenzierbare Funktion absolut und gleichmäßig nach $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ allein.

Reviewer: Toeplitz, Dr. (Göttingen)