Weber, H.
On complex primes in linear forms. (Über komplexe Primzahlen in Linearformen.) (German)
JFM 36.0284.01
J. für Math. 129, 35-62 (1905).

*Einleitung: Dirichlet*s Beweis für den Satz, daß eine Linearform unendlich viele Primzahlen darstellt, leidet an dem Mangel, daß seine Methode nicht einheitlich ist. Der Verf. hat in seiner Arbeit über Zahlengruppen (Math. Ann. *48, 49, 50*; "F. d. M. *28*, 83, 1897, siehe JFM 28.0083.04, JFM 28.0083.05 u. JFM 28.0083.06") allgemeine Grundsätze aufgestellt, wie dieses Problem einheitlich durchzuführen ist. Er will diese Aufgabe im einfachen Fall des quadratischen Körpers $(\sqrt{-1})$ als Rationalitätsbereich ausführen.

§ 1. Allgemeine Sätze über $k(\sqrt{-1})$. Einteilung seiner Zahlen in Klassen nach einem allgemeinen Modul μ, wobei assoziierte Zahlen in dieselbe Klasse fallen. Diese Klassen bilden eine *Abel*sche Gruppe.

§ 2. Fall der unzerlegbaren Primzahl $q \equiv 3 \pmod{4}$. Bedingungen dafür, daß eine Linearform in $k(\sqrt{-1})$ unendlich viele solcher Primzahlen q darstellt.

§ 3. Zu jeder Klasse von § 1 gehören h Einheitswurzeln als Gruppencharaktere.

§ 4. Ist $Z(n)$ die Anzahl der Zahlen $\mu\xi + \alpha$ [ξ durchlaufe alle ganzen Zahlen von $k(\sqrt{-1})$, deren Norm $\leqq n$ ist], so ist $\frac{Z(n)}{n}$ von der Wahl von α unabhängig und nähert sich mit wachsendem n einem endlichen Grenzwert. Hieraus geht hervor, daß:

$$A(s) = \Sigma\xi \, \frac{1}{(N(\mu\xi+\alpha))^s} = \sum_1^\infty {}_n Z(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right),$$

$(N(\mu\xi + \alpha)$ die Norm von $\mu\xi + \alpha)$, welche Beziehung das Resultat ergibt, daß

$$A(s) = \frac{\pi}{m(s-1)} + G \quad , \quad m = N(\mu),$$

wo G einen bestimmten *endlichen* Wert für $s = 1$ annimmt, der allein von der Wahl der Klasse des α abhängt.

§ 5. Sind χ_i $(i = 1, 2, 3, \dots, h)$ die h Charaktere der Klassen nach μ, und setzt man:

$$Q_i(s) = \Sigma \, \frac{\chi_i(\alpha)}{(N(\alpha))^s}$$

so ergibt sich, falls α in der Klasse A liegt:

$$\tfrac{1}{h} \sum^i \chi_i(A^{-1}) \log Q_i(s) = \sum \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + \tfrac{1}{2} \sum \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{2s}} + \cdots$$

wo die erste Summe über alle Primideale in A, die 2te über alle Primideale, deren Quadrat in A liegt, usf. zu erstrecken ist. Da Q_1 (wie aus § 4 folgt) für $s = 1$ über alle Grenzen wächst, so wird, *falls* $Q_2, Q_3, Q_4, \dots$ *von* 0 *verschiedene Grenzwerte annehmen*, die linke Seite für $s = 1$ unendlich groß; also müßte auch rechts $\Sigma \frac{1}{N(\mathfrak{P})^s}$ über alle Grenzen wachsen, d. h. es gäbe unendlich viele Primideale in A. Um das noch fehlende Stück zu beweisen, betrachtet der Verf. das Produkt:

$$(s-1)Q_1(s)Q_2(s)\dots Q_h(s),$$

das im wesentlichen $(s-1)\zeta(s)$ ist, wo $\zeta(s)$ die ζ-Funktion eines allgemeinen Körpers, des Klassenkörpers in bezug auf die Klassen A ist. Das Produkt ist also von 0 verschieden für $s = 1$, und endlich, falls es einen solchen Körper gibt.

§ 6. Hier wird schließlich noch die Existenz dieses Körpers mit Hülfe der Teilungsgleichungen der lemniskatischen Funktionen erbracht.

Reviewer: Fueter, Prof. (Basel)

MSC:

11R44 Distribution of prime ideals
11R37 Class field theory
11R42 Zeta functions and L-functions of number fields
11R45 Density theorems
11G15 Complex multiplication and moduli of abelian varieties

Cited in **1** Review

Keywords:

gaussian primes in ray classes; density; ray class field; L-functions of ray class characters in $\mathbb{Q}(i)$

Full Text: DOI Crelle EuDML