Cartan, E.

Sur la structure des groupes infinis de transformations. (French) JFM 36.0223.03

Ann. de l'Éc. Norm. (3) 22, 219-308 (1905).

Die Fortsetzung der F. d. M. *35*, 176, 1904, JFM 35.0176.04 besprochene Arbeit. Zunächst wird gezeigt, daß jede Gruppe G, die durch eine Anzahl invarianter Funktionen U und eine Anzahl invarianter *Pfaff*scher Ausdrücke ω_k definiert ist, auch definiert werden kann als die allgemeinste Gruppe, welche die Funktionen U invariant läßt und gewisse *Pfaff*sche Ausdrücke ϖ_k durch eine lineare homogene Gruppe Γ transformiert. Diese Gruppe Γ bezeichnet der Verf. als die "adjungierte Gruppe". Ist Γ gegeben, so müssen die ϖ_k gewisse Bedingungen erfüllen, wenn sie zusammen mit Γ eine Gruppe G definieren sollen. Die neue Definition der Gruppe G hat den Vorteil, daß in ihr nur solche *Pfaff*schen Ausdrücke auftreten, die aus den bei der Gruppe transformierten Veränderlichen $x_1, \dots, x_r$ gebildet sind, und außerdem eine lineare homogene Gruppe. Der Verf. betrachtet dann zunächst das, was er die "normale holoedrische Erweiterung" von G nennt. Man erhält, indem man zu den x die Veränderlichen y hinzunimmt, die in den früher betrachteten *Pfaff*schen Ausdrücken ω und ϖ vorkommen, eine erste erweiterte Gruppe G', deren Struktur und deren adjungierte Gruppe Γ' bestimmt wird, aus G' eine zweite erweiterte Gruppe G'' usw. Als Beispiele werden die normalen Erweiterungen der unendlichen Gruppen aller Punkttransformationen der Geraden und der Ebene betrachtet. Sodann wird allgemein untersucht, wann eine unendliche Gruppe G die Erweiterung einer vorgelegten Gruppe G_1 ist. Man kann dabei annehmen, daß G alle Veränderlichen $x_1, \dots, x_s$ von G_1 untereinander vertauscht, und die Erweiterung wird holoedrisch oder meriedrisch sein, jenachdem die Transformationen von G, bei denen $x_1, \dots, x_s$ alle invariant bleiben, sich auf die identische Transformation reduzieren oder eine neue Gruppe $\overline{G}$ bilden. Man kann aus der bloßen Struktur von G erkennen, welcher von beiden Fällen eintritt, und im zweiten Falle auch die Struktur von $\overline{G}$ ermitteln. Auch hierfür werden Beispiele gegeben, und dann wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine Gruppe G, deren Definitionsgleichungen von der ersten Ordnung sind, die holoedrische Erweiterung einer Gruppe G_1 von derselben Art ist. Es folgt die allgemeine Theorie der Bestimmung aller Gruppen, die zu einer gegebenen Gruppe G holoedrisch isomorph sind, mit Anwendungen auf spezielle endliche und unendliche Gruppen. Es stellt sich nun weiter heraus, daß zwei unendliche Gruppen G_1 und G_2 ähnlich und also holoedrisch isomorph sein können, während zugleich eine dritte Gruppe G existiert, die eine holoedrische Erweiterung von G_1 und eine meriedrische von G_2 ist, so daß dann G_1 und G_2 zugleich auch meriedrisch isomorph sind. Man muß daher zwischen eigentlichem und uneigentlichem meriedrischem Isomorphismus unterscheiden. Eigentlich meriedrisch isomorph sind zwei Gruppen, die als meriedrisch isomorph, aber auf keine Art als holoedrisch isomorph aufgefaßt werden können. Ebenso heißt eine Gruppe eigentlich einfach, wenn sie weder eigentlich noch uneigentlich meriedrisch isomorphe Gruppen zuläßt, uneigentlich einfach, wenn sie keine eigentlich meriedrisch isomorphen Gruppen zuläßt, sondern nur uneigentliche. Den Schluß der Abhandlung bildet eine Untersuchung über die unendlichen Gruppen, die von willkürlichen Funktionen eines Arguments abhängen.

Reviewer: Engel, Prof. (Greifswald)