Wright, J. E.
On differential invariants. (English) JFM 36.0176.04
American M. S. Trans. 6, 286-315 (1905).

In der Theorie der Differentialgleichungen treten Ausdrücke auf, wie z. B. der bekannte *Jacobi-Poisson*sche Klammerausdruck, die sich gegenüber allen Berührungstransformationen invariant verhalten. Es entsteht das wichtige Problem, alle Invarianten (von Differentialausdrücken) des in Rede stehenden Typus aufzustellen. Der Verf. beschränkt sich auf folgende Fälle: 1. Die Differentialausdrücke sind entweder (a) von der ersten Ordnung mit m abhängigen und n unabhängigen Variabeln, oder aber (b) von der zweiten Ordnung mit einer abhängigen Variable; 2. Die Invarianten sollen nur von der ersten Ordnung sein, d. h. nur die ersten Ableitungen der Differentialausdrücke enthalten. Im Falle (a) seien $x_1, \dots, x_n$ die unabhängigen, $z_1, \dots, z_m$ die abhängigen Variabeln, $p_k^i = \partial z_i/\partial x_k$, $p_{kl}^i = \partial^2 z_i/\partial x_k \partial x_l$; ferner $f_\lambda(x, z, p_k^i)$ $(\lambda = 1, \dots, r)$ die vorgelegten Differentialausdrücke, so daß

$$dz_i = \sum_{k=1}^{n} p_k^i dx_k, \quad dp_k^i = \sum_{l=1}^{i} p_{kl}^i dx_l.$$

In seiner grundlegenden Abhandlung über Differentialinvarianten (F. d. M. *16*, 91, 1884, JFM 16.0091.01) zeigt *Lie* für Invarianten gewisser Typen infinitesimaler Transformationen, wie eine Reihe solcher Invarianten erhalten werden kann, die einem gewissen vollständigen System linearer Differentialgleichungen genügen. Im besonderen beschäftigt er sich mit Deformationsinvarianten von Flächen. Dieser Gegenstand ist ganz allgemein von *Forsyth* (F. d. M. *34*, 147, 1903, JFM 34.0147.01; *35*, 610, 1904, JFM 35.0610.12) aufgenommen worden, der nach Invarianten fragt, die sich bei einer ganz beliebigen auf eine Fläche ausgeübten Punkttransformation ergeben, und auf die dem Wege zu einer Theorie der Differentialinvarianten des Raumes gelangt.

Indem der Verf. diese Methoden von *Lie* und *Forsyth* (vgl. auch *. Zorawski*, F. d. M. *24*, 737, 1892, JFM 24.0737.03) mit geeigneten Modifikationen und Vereinfachungen anwendet, untersucht er unter den obigen Voraussetzungen Invarianten F, deren Transformierte F_1 sich von F um einen Faktor Ω unterscheiden, der allein von der Transformation abhängt. Wäre die Transformation eine allgemeine in ihren Variabeln, so würde Ω einfach eine Potenz der zur Transformation gehörigen *Jacobi*schen Funktion werden. Aber diese Voraussetzung trifft hier nicht zu. Die *Jacobiana* von $X_k, Z_i, P_k^i, P_{kl}^i$ (wo die großen Buchstaben den transformierten Größen entsprechen) in bezug auf $x_k, z_i, p_k^i, p_{kl}^i$ zerfällt nämlich in zwei Faktoren $\overline{J_1}$ und J_2, und wenn die Transformation eine Punkttransformation ist, zerfällt $\overline{J_1}$ nochmals in zwei Faktoren J_0 und J_1. Diese Faktoren können nun in verschiedene Potenzen in Ω vereinigt sein. Es werden jetzt die Inkremente berechnet, die jene Faktoren gegenüber infinitesimalen Transformationen erleiden.

Liegt dann eine erweiterte infinitesimale Berührungstransformation von in n unabhängigen Variabeln $x_1, \dots, x_n$ und der abhängigen Variable z, und wird für r Indizes $h, k, l, \dots$ die Differentiation $\partial^r z/\partial x_h \partial x_k \partial x_l \dots$ mit $p_{hkl}\dots$ bezeichnet, so wird das Inkrement von $p_{hkl}\dots$ gleich $(d^r\Theta/dx_h dx_k dx_l \dots)\delta t$, wo unter Θ der Ausdruck $\frac{dz}{dt} - \sum_1^n p_l \frac{dx_l}{dt}$ zu verstehen ist (für t als Parameter der Transformation) und die angegebene totale Differentiation von Θ so zu verstehen ist, daß die die höchsten Ableitungen von z enthaltenden Terme unterdrückt werden.

Handelt es sich nunmehr um die Bestimmung der Invarianten F von Differentialausdrücken der erster Ordnung, so hat man die Gleichung $\frac{dF}{dt} + \mu(n+1)\Theta_z F = 0$. Da Θ eine völlig willkürliche Funktion der Variabeln $x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n$ ist, so muß jene Gleichung für alle Werte von Θ erfüllt sein. Setzt man also die Koeffizienten der Ableitungen von Θ gleich Null, so erhält man das System linearer partieller Gleichungen, denen F genügen muß. Daraus ergibt sich, daß F eine Funktion der Größen Z_i, P_{ik}, und $A_{ik} = X_{ik} + p_k Z_i$ werden muß. Legt man diese Tatsache umgekehrt der obigen Gleichungen zu grunde, so modifizieren sie sich derart, daß sie, bei Weglassung der ersten, ein vollständiges System bilden.

Das System dieser letzteren Gleichungen liefert nach Integration das Ergebnis, daß F eine Funktion der *Poisson*schen Klammerausdrücke $[f_\lambda f_\mu](\lambda, \mu = 1, \dots, \nu)$ wird; überdies hat F noch jener ersten Gleichung zu genügen. Diese sagt aber nur aus, daß F in den P_i homogen vom Grade $\mu(n+1)$ ist, und somit wird F eine homogene Funktion der $[f_\lambda f_\mu]$.

Das Gesamtergebnis ist, daß bei r Ausdrücken f die einzigen funktional unabhängigen relativen Invarianten des in Rede stehenden Typus für $\nu < 2n+1$ die Klammerausdrücke $[f_\lambda f_\mu]$ sind, während für $\nu = 2n+1$ noch eine Invariante hinzutritt, nämlich die *Jacobiana* der Formen bezüglich der in sie eingehenden Variabeln. Der Verf. betont, daß gerade dieser Zusatz über *Lie* hinausgeht.

In ähnlicher Weise wird der andere, im Eingange formulierte Fall von einer abhängigen und n unabhängigen Variabeln behandelt. Als Invarianten treten auf: 1. Ausdrücke vom Typus df; 2. algebraische In- und Kovarianten der quadratischen Formen $\Sigma \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} v_i v_k$, wo die Variabeln $v_k = dp_k - \Sigma p_{ki} dx_i$ sind; und 3. algebraische Invarianten der quadratischen Formen $\Sigma \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} y_i y_k$ und der Linearform $\Sigma y_i dx_i$, wo die y beliebige Variabeln bedeuten.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI