Jensen, J. L. W. V.
Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. (French)
JFM 37.0422.02
Acta Math. 30, 175-193 (1906).

Die Funktion $\varphi(x)$ der reellen Variable x wird konvex genannt, wenn sie reell, eindeutig und endlich ist und der Ungleichung

$$\varphi(x)+\varphi(y)\geq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

in einem gewissen Intervall genügt. Ähnlich werden konkave und lineare Funktionen definiert. Die Funktion x^p ist z. B. für reelle p im allgemeinen konvex; sie ist konkav nur für $0<p<1$ und linear für $p=1$.

Die zu n Werten des Arguments gehörigen Werte einer konvexen Funktion besitzen ein arithmetisches Mittel, das dem Werte mindestens gleichkommt, den die Funktion für das arithmetische Mittel der Argumentwerte annimmt. Daraus ergeben sich zwei wichtige Folgerungen: 1. Besitzt eine konvexe Funktion eine obere Grenze, so ist sie stetig und hat in jedem Punkte ihres Geltungsbereiches einen vorwärts und einen rückwärts genommenen Differentialquotienten. 2. Es ergibt sich in überraschend einfacher Weise die Hauptungleichung (5) der Arbeit:

$$\varphi\left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}\right)\leq\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(x_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}\quad(a_n>0),$$

die, wie Verf. am Schluß angibt, zwar nicht neu, aber in ihrer Bedeutung bisher unterschätzt worden ist. Denn Ungleichungen von *Cauchy*, *Simon*, *Schlömilch*, *Bienaymé*, *Rogers* u. a. erscheinen als ganz spezielleFälle allgemeinerer, aus (5) abgeleiteter Beziehungen.

Der naheliegende Übergang von (5) zu einer Relation zwischen bestimmten Integralen ist neu.

Erwähnt seien noch Sätze über konvexe Funktionen konvexer Funktionen usw., das Beispiel einer stetigen Funktion, die in einer (beliebig gegebenen) abzählbaren Menge von Punkten verschiedene, sonst aber überall gleiche vorwärts und rückwärts genommene Ableitungen besitzt, und schließlich eine Verallgemeinerung der Definition für konvexe Funktionen mehrerer Variabeln.

Reviewer: Lewent, Oberl. (Berlin)

Full Text: DOI

References:

[1] On peut facilement la déduire de l'identité \(\frac{{I - a^n }}{{I - a}} = I + a + a^2 + ... + a^{n - 1}\) par une méthode tout à fait élémentaire.

[2] Über einige Ungleichungen, Zeitschrift für Math. u. Physik, t. 33, p. 57, 1888. · Zbl 19.0715.01

[3] Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. 3, p. 301, 1858.

[4] Société philomatique de Paris, Extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1840, p. 67, Paris 1841.

[5] A l'endroit cité.

[6] Messenger of Mathematics, t. 17, 1888.

[7] Cette proposition s'applique également à une fonction concave, en y remplaçant "limite supérieure{" par "limite inférieure{". De ce qu'une "fonction linéaire{" peut être considérée comme un cas particulier des deux classes de fonctions, il résulte: Une "fonction linéaire{" qui a dans un certain intervalle soit une limite supérieure, soit une limite inférieure, est continue. De ce résultat on conclue aisément la proposition suivante: une "fonction linéaire{" ayant ou une limite supérieure ou une limite inférieure dans un intervalle donné a toujours la formea+bx dans cet intervalle,a etb étant des constantes. Par là est pleinement justifiée la dénomination que nous avons introduite.}}}}}

[8] Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen, Sitzungsber. d. math. phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. W., t. 32, p.

163–192. Nachtrag..., ibid. p. 295–303.

[9] Über einen Mittelwertsatz, Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. W. zu Göttingen, 1889, p. 38–47. · Zbl 21.0260.07