Hadamard, J.

On a method of the calculus of variations. (Sur une méthode de calcul des variations.)

(French) JFM 37.0389.01
C. R. 143, 1127-1129 (1907).

Die wichtigen Methoden, die *Hilbert* für das Studium der Probleme der Variationsrechnung gegeben hat, bezwecken nur, die Existenz der Lösung nachzuweisen, nicht eine, wenn auch noch so theoretische Rechnungsvorschrift zu geben. Das gleiche Ziel sucht der Verf. auf einem andern Wege zu erreichen, ohne aber den letzteren Gesichtspunkt aus dem Auge zu lassen. Sein Verfahren erlaubt mit aller Strenge die numerische Berechnung und in jedem Falle das analytische Studium der Lösung.

Bezeichnet h eine willkürliche Konstante, so ist die erste Variation δI des Integrals $I = \int_0^a f(x, y, y')dx$ gleich $\delta I = \int_0^a Q.\delta y'.dx$, wo $Q = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y} dx - h$ ist und δ partielle Derivierte nach einem Hülfsparameter α bezeichnet. Die Gleichungen

$$\delta y' = -\varrho Q, \quad \delta y = \int_0^x \delta y' dx,$$

wo ϱ positiv (und hier konstant) und h so bestimmt ist, daß δy Null wird für $x = a$, können leicht durch sukzessive Näherungen nach Art der gewöhnlichen Differentialgleichungen integriert werden, wenn man den Anfangswert von y als Funktion von x für $\alpha = 0$ als gegeben annimmt. Dann ist, wenn dieser Anfangswert eine zweite Ableitung nach x besitzt,

$$\delta y'' = -\varrho[Ay'' + \varphi(x, y, y')],$$

wo

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}, \quad \varphi(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x}$$

ist. Der Wert von $\delta I = -\int_0^a \varrho Q^2 dx$ ist stets negativ. Beschränkt man sich auf positive Funktionen f, für die 1. A positiv ist und sogar für $y' = \pm\infty$ eine positive untere Grenze besitzt, 2. $\frac{\varphi^2}{f}$ stets eine bestimmte obere Grenze zuläßt und 3. die zweite Variation $\int_0^a \left(A\delta {y'}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2\right) dx$ positiv und f nicht unendlich klein gegen das erste Glied $\int_0^a A\delta {y'}^2 dx$ ist, dann konvergieren δI und $\delta y'$ nach einem Exponentialgesetze für einen unendlich großen Wert von α gegen Null. y und y' konvergieren daher für $\alpha = +\infty$ gegen Grenzwerte, die die Bedingungen des Problems verifizieren. Hieraus folgt, daß es nur eine Lösung des Problems gibt, was aus den klassischen Methoden sich nicht ergibt.

Verzichtet man auf die Annahme (3), so konvergiert $\delta y'$ noch in eindeutiger Weise gegen Null; aber es läßt sich nicht a priori das Gesetz, nach dem dies geschieht, angeben. y' konvergiert dann entweder gegen einen bestimmten Grenzwert oder gegen unendlich viele, die sämtlich δI zu Null machen. Dieser letztere Fall ist eine Ausnahme und kann nur dann eintreten, wenn unendlich viele Extremalen durch die beiden gegebenen Punkte gehen.

Reviewer: Haussner, Prof. (Jena)

MSC:

49J05 Existence theories for free problems in one independent variable
49K05 Optimality conditions for free problems in one independent variable

Keywords:

successive approximation; second variation

Full Text: Gallica