Study, E.
Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie. I., II., III. (German) JFM 38.0503.03
American J. 29, 101-167 (1907).

I. *Gerade und Punkt als Extreme.* In der hyperbolischen Geometrie liefert die Formel für die Entfernung (x, y) zweier Punkte x, y auch dann einen reellen Wert, wenn die Punkte außerhalb des Fundamentalkegelschnitts so liegen, daß ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt trifft. Der Verf. zeigt nun, daß unter einer gewissen Bedingung die Punkte x, y, z, die paarweise in dieser Beziehung stehen, ein Dreieck bilden, in dem die eine Seite z. B. $(y, z) \geqq (y, x) + (x, z)$, und daß die drei Punkte im Falle der Gleichheit nicht in gerader Linie liegen. Er sagt dann, daß x zwischen y und z liegt. Man kann die beiden Punkte y und z durch kontinuierliche Kurvenzüge verbinden, die aus lauter zwischen y und z liegenden Punkten bestehen, und jeder solche Kurvenzug (der Verf. nennt ihn einen *Weg* zwischen y und z) hat eine endliche Länge $\leqq (y, z)$. daher kann man unter dieser Voraussetzung sagen: Die Gerade, die $y4undzverbindet, istunterallenWegenzwischeny$4 und z der längste. Liegen y und z außerhalb des Kegelschnitts, ohne daß ihre Verbindungslinie diesen trifft, so kann man ihnen durch eine elliptische Maßbestimmung eine reelle Entfernung erteilen. Die von y und z aus an den Kegelschnitt gehenden Tangenten bestimmen dann zwei Vierseite, innerhalb deren keine Verbindungslinie zwischen y und z größer ist als die geradlinige Verbindungslinie (y, z). Schließlich zeigt der Verf. noch, daß der erste Satz über die Gerade als längste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf Räume von beliebiger Dimensionenzahl ausdehnbar ist, während der zweite nur für die Ebene gilt.

II. *Die Begriffe Links und Rechts in der elliptischen Geometrie.* Die Begriffe Speer, Linienkreuz und Pfeil, mit denen der Verf. hier operiert, hat er schon in zwei älteren Abhandlungen (s. F. d. M. 31, 470, 1900, JFM 31.0470.01 u. 37, 485, 1906, JFM 37.0485.01) eingeführt. Er untersucht hier die elliptische Geometrie unter Zugrundelegung seiner Abbildung der reellen Speere auf die Punktpaare zweier reellen Kugeln vom Halbmesser 1 im euklidischen Raume und zeigt, wie man durch bestimmte Wahl der Vorzeichen gewisser Quadratwurzeln die Begriffe Rechts und Links auch in der elliptischen Geometrie so definieren kann, daß sie bei allen Bewegungen erhalten bleiben, bei den Umlegungen vertauscht werden. Zum Beispiel kann man definieren, was unter rechtsgewundenen und linksgewundenen Schraubenflächen und Schraubenlichen zu verstehen ist, und dabei ergibt sich, daß konsequenterweise in der euklidischen Geometrie die gemeine Schraubenfläche, auf der eine rechtsgewundene Schraubenlinie liegt, als linksgewunden zu bezeuchnen wäre. Der Übergang ins komplexe Gebiet, der zur Unterscheidung der im reellen Gebiete zusammenfallenden Begriffe Speer und Pfeil nötigt, ermöglicht durch Einführung der komplexen Pfeilparameter eine wesentlich einfachere analytische Darstellung der ganzen Theorie und setzt sie in Beziehung zu der Geometrie und Invariantentheorie der Polarsysteme *Hermite*scher Formen. Ein ausführ;licher Bereicht über die Arbeit würde selbst eine Abhandlung werden.

III. *Schraubenflächen als Extreme.* Man kann die reellen Gerdaen des elliptischen (oder sphärischen) R_3 derart auf die Punkte einer reellen quadratischen Mannigfaltigkeit des elliptischen R_5 abbilden, daß den Schraubenflächen die geodätischen Linien dieser Mannigfaltigkeit entsprechen. Ebenso lassen sich die reellen Speere (Pfeile) des R_3 derart auf die Punkte einer reellen Mannigfaltigkeit 4-ter (24-ter) Ordnung im elliptischen R_6 (R_{15}) abbilden, daß den aus Speeren (Pfeilen) bestehenden Schraubenflächen geodätische Linien der betreffenden Mannigfaltigkeit entsprechen. Entsprechendes ergibt sich, wenn man die Schraubenflächen als Örter von Linienkreuzen ansieht. Man kann daher auch schon im R_3 selbst z. B. den geodätischen Abstand zweier Speere definieren. Ebenso sind die Schraubenflächen auch im hyperbolischen und im euklidischen Raume die Lösungen von Problemen der Variationsrechnung, die zu quadratischen Differentialformen gehören; nur haben sie da nicht die Eigenschaft, *Extreme* zu liefern.

Reviewer: Engel, Prof. (Greifswald)

Full Text: DOI