Hadamard, J.

On some questions of the calculus of variations. (Sur quelques questions du calcul des variations.) (French) JFM 38.0404.03

Ann. de l'Éc. Norm. (3) 24, 203-231 (1907).

Die Ausarbeitung einer zusammenfassenden Darstellung der Variationsrechnung hat den Verf. veranlaßt, Ergänzungen verschiedener Resultate zu geben, auf die er bereits in einer früheren Arbeit (F. d. M. 36, 430, 1905, JFM 36.0430.02) hingewiesen hatte. Diese Ergänzungen beziehen sich besonders auf drei Punkte.

Zunächst spricht der Verf. von dem *Hilbert*schen Existenztheorem. Für den Fall des absoluten Extremums einfacher Integrale liefert streng genommen die *Hilbert*sche Methode nicht mehr als die älteren, da sie die Existenz eines Minimums "im Kleinen" voraussetzt. Will man aber die *Hilbert*sche Methode auf das allgemeine isoperimetrische Problem, ein Integral I zu einem Extremum zu machen, während ein anderes Integral J einen vorgeschriebenen Wert hat, übertragen, so ergeben sich eigentümliche Schwierigkeiten, die darin ihren Grund haben, daß der Satz von der Existenz eines Extremums im Kleinen im allgemeinen nicht mehr richtig ist, wie der Verf. an einem Beispiele zeigt. Man muß bei dem Nachweise der Existenz eines Extremums von I auf die besondere Form der Integrale I und J Rücksicht nehmen und kann dann in gewissen Fällen die Möglichkeit einer Lösung aus der Existenz absoluter Extreme von $I - lJ$ folgern. Hierbei erfordern kleine und große Werte der isoperimetrischen Konstante l verschiedene Arten der Behandlung des Problems. Dieser erste Abschnitt schließt mit einer kurzen Bemerkung über die notwendigen Bedingungen für ein relatives Extremum, wenn die Bedingungen des Problems auch Ungleichungen enthalten.

Der zweite Punkt betrifft die Extreme mehrfacher Integrale, für deren Behandlung sich die *Hilbert*schen Methoden sehr wertvoll erwiesen haben; jedoch bereitet der Nachweis Schwierigkeiten, daß der gefundene Grenzwert auch wirklich eine Extremale ist. Der von *Hilbert* für den Fall einfacher Integrale gegebene Beweis stützt sich auf den bekannten *Osgood*schen Satz, der aber für mehrfache Integrale nicht stets richtig ist; es darf vielmehr dann, wie der Verf. zeigt, der *Osgood*sche Satz nur auf Funktionen angewandt werden, die gleichmäßig stetig sind. Und diese Eigenschaft war in den Fällen, in denen man die *Hilbert*schen Methoden benutzt hat, besonders bei dem *Dirichlet*schen Problem, vorausgesetzt.

Zuletzt bespricht der Verf. das allgemeine Problem der Variationsrechnung, das *A. Mayer* wiederholt behandelt hat, und das er daher kurz als *Mayer*sches Problem bezeichnet (F. d. M. 36, 428, 1905, JFM 36.0428.02). Die für dasselbe von *Kneser* in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung aufgestellten hinreichenden Bedingungen für ein Extremum sind nach den Untersuchungen des Verf. zu eng, weil in ihnen implizite die Bedingung steckt, daß eine gewisse Funktion $\psi_1(x)$ nicht verschwindet. Der Verf. zeigt, daß auch noch ein Extremum existiert, wenn ψ_1 für einen oder mehrere Werte von x verschwindet, und legt die Besonderheiten dieses Falles dar.

Reviewer: Haussner, Prof. (Jena)

MSC:

49J05 Existence theories for free problems in one independent variable
49K05 Optimality conditions for free problems in one independent variable
49K10 Optimality conditions for free problems in two or more independent variables
49J10 Existence theories for free problems in two or more independent variables

Keywords:

isoperimetric problems; Mayer's problem; existence of solutions

Full Text: DOI Numdam EuDML