Hadamard, Jacques.

Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.

(French) JFM 39.1022.01
Mém. Sav. étrang. (2) 33, Nr. 4, 128 S. (1908).

Die Abhandlung wurde am 2. Dezember 1907 von der Akademie in Paris preisgekrönt (dreiviertel des Prix *Vaillant*); neben ihr erhielten die eingereichten Arbeiten von *A. Kron* und *G. Lauricella* je einen Preis in der halben Höhe des Prix *Vaillant*. Die Aufgabe lautete: "Das Problem der Analysis bezüglich des Gleichgewichtes der eingefalzten elastischen Platten in einem bedeutsamen Punkte zu vervollkommnen, d. h. das Problem der Integration der Gleichung $\partial^4 u/\partial x^4 + 2\partial^4 u/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4/\partial y^4 = f(x, y)$ unter den Bedingungen, daß die Funktion u und ihre Ableitung nach der Normale an der Randkurve der Platte Null sind. Spezieller ist der Fall eines rechteckigen Randes zu prüfen". Der Verf. gibt in der Einleitung folgende Übersicht über seine Arbeit:

In der gegenwärtigen Abhandlung nehme sich hauptsächlich die Erforschung des Gesetzes in Angriff, nach welchem die verschiedenen Größen sich ändern, die bei der Bestimmung der biharmonischen Funktionen auftreten, wenn man die Form des Bereichs, der sie erzeugt, abwandelt.

Die auf die Gleichung $\Delta\Delta V = 0$ und die verwandten Gleichungen $\Delta\Delta V - kV = 0$ bezüglichen Fundamentalprobleme können als prinzipiell gelöst angesehen werden durch die Theorie der Integralgleichungen von *Fredholm* und *Hilbert*. Für jede ebene Fläche, die durch eine Randkurve C begrenzt ist, auf der die Koordinaten x und y in bezug auf den Bogen s Ableitungen der drei ersten Ordnungen zulassen, ermöglicht diese Theorie die Sicherung der Existenz einer Funktion V, welche Lösung von $\Delta\Delta V = 0$ ist, während V und dV/dn auf C gegebene (selbst wieder mit Ableitungen versehene) Werte annehmen. Wir werden weiter unten die Formeln hinsetzen, durch welche diese Funktion ausgedrückt wird.

Insbesondere kann man so eine "*Green*sche Funktion" Γ_A^B von der Ordnung 2 bilden, welche durch die folgenden Eigenschaften definiert wird: 1) Als Funktion der Koordinaten des Punktes B definiert, ist Γ gleich $r^2 \log r (r = \bar{AB})$, vermindert um eine analytische und reguläre Funktion (Γ). 2) (Γ) und somit auch Γ sind Lösungen der Gleichung $\Delta\Delta\Gamma = 0$. 3) $\Gamma = d\Gamma/dn = 0$ in jedem Punkte der Randkurve C.

Diese in bezug auf die beiden Punkte A und B (von denen sie abhängt) symmetrische Funktion stellt die Normalbiegung dar, die in B eine dünne homogene und isotrope elastische Platte erleiden würde, welche die Form der Fläche S hat, an ihrem Rande ringsum eingefalzt ist und einer einzigen, in A angreifenden Normalkraft unterworfen wird.

Die Kenntnis der Funktion Γ ermöglicht es, die Lösung des vorstehenden Problems durch eine einfache Quadratur darzustellen. Hierzu genügt es, Γ_A^M in der folgenden grundlegenden Formel zu setzen (in der V immer die unbekannte Funktion ist):

$$\iint_S (U \ \cdot \Delta\Delta V - V \cdot \Delta\Delta S) dS = -\int_C \left[U \,\frac{d(d\Delta V)}{dn} - \frac{dU}{dn}\, \Delta V + \frac{dV}{dn}\, \Delta U - V\, \frac{d(\Delta U)}{dn} \right] ds.$$

Ist erst die Funktion Γ bekannt, so werden die auf $\Delta\Delta V$ bezüglichen Fundamentalzahlen k und Fundamentalfunktionen V der Fläche S, d. h. die durch die Bedingungen $\Delta\Delta V - kV = 0$ (innerhalb S), $V = dV/dn = 0$ (auf C) definierten Größen, weiter erhalten durch die Auflösung der Integralgleichung

$$V_A = -\frac{1}{8\pi k} \iint_S \Gamma_A^M V_M dS_M = 0.$$

In dieser Gleichung ist der "Kern" symmetrisch in bezug auf die beiden Punkte, von denen er abhängt. Sie besitzt unendlich viele Wurzeln, die alle reell und positiv sind. Die verschiedenen Ausdrücke, deren Bildung wir angedeutet haben, hängen ab: 1. von den Koordinaten eines oder mehrerer Punkte von S, 2. von der Gestalt der Randkurve C. Ich beabsichtige, in der gegenwärtigen Arbeit den Einfluß dieses letzteren Elementes und seiner Änderungen zu erforschen, besonders die sich anschließenden Probleme der Maxima und Minima.

Von dem Gang der Untersuchung möge das folgende Inhaltsverzeichnis eine Vorstellung geben.

Teil I. Die erste Variation.

Teil II. Ausdruck und Eigenschaften der verallgemeinerten *Green*schen Funktionen. § 1. Lösung des biharmonischen Problems nach der *Fredholm*schen Methode. § 2. Anwendung auf die analytische Fortsetzung. § 3. Relationen zwischen den *Green*schen Funktionen einhüllender und eingehüllter Raumkurven. Anwendung auf den Fall der Winkelpunkte. § 4. Werte von $\Delta\Gamma$ und von $d\Delta\Gamma/dn$ am Rande. § 5. Gemischte Integralgleichung, die den verschiedenen *Green*schen Funktionen gemeinschaftlich ist. Vorkommen einer analogen Gleichung in der Hydrodynamik.

Teil III. Das Extremum der Biegung in einem Punkte. § 1. Wortlaut einer neuen Kategorie von Fragen der Variationsrechnung. § 2. Stetigkeit nach *Lipschitz*. § 3. Die Biegung Γ_A^B für eine Randkurve von gegebener Länge. § 4. Berechtigung des Überganges zur Grenze. § 5. Andere Methode, um zu demselben Ziele zu gelangen. § 6. Fall, bei welchem die Fläche gegeben ist.

Teil IV. Allgemeine Methode der Variationsrechnung. § 1. Prinzip der Methode. Die gewöhnlichen Extreme der Differentialgleichung. § 2. Allmähliche Annäherunge für das Minimum von $\int f(x,y,y')dx$. § 3. Fall, bei dem das Vorzeichen der zweiten Variation bestimmt, § 4 nicht bestimmt ist.

Teil V. Anwendung auf das im dritten Teile behandelte Problem. § 1. Nachweis des relativen Maximums. § 2. Bemerkungen über das absolute Maximum.

Nachtrag. Existenz der Funktion Γ für die zerschnittene Ebene. § 1. Berechnung von Γ für die *Pascal*sche Schnecke nach *Almansi*. § 2. Grenzübergang.

Reviewer: Lampe, Prof. (Berlin)