Hilb, E.

Über Integraldarstellung willkürlicher Funktionen. (German) JFM 39.0405.01

Math. Ann. 66, 1-66 (1909); auch sep. als Habilitationsschrift Erlangen (1909).

Die Untersuchungen, die das Problem der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen seither erfahren hat, beschränken sich im wesentlichen auf den "regulären" Fall, in dem man abzählbar unendlichviele gegen ∞ konvergierende Eigenwerte hat und in dem jene Entwicklung der gewöhnlichen *Fourier*schen Reihe analog ist. Wie dieses Problem in seiner Allgemeinheit von *Hilbert* (zweite Mitt.; F. d. M. 35, 386, 1904, JFM 35.0378.03) auf die Theorie der orthogonalen linearen Integralgleichungen mit regulärem (d. h. hinreichend wenig unstetigem) Kerne zurückgeführt worden ist, so behandelt vorliegende Arbeit die entsprechenden Theorien für Differentialgleichungen mit höheren Singularitäten durch einen analogen Übergang zu Integralgleichungen mit höher singulären Kernen, wobei die in *Hilbert*s 4. Mitt. (F. d. M. 37, 351, 1906, JFM 37.0351.03 u. JFM 37.0351.04) geschaffene Methode der unendlichvielen Variablen zur Behandlung dieser Integralgleichungen in besonderer Weise verwendet wird. Das Hauptziel ist, gemäß dem *Hilbert*schen Schritt vom abzählbar unendlichen "Punktspektrum" (= Gesamtheit der Eigenwerte) zum kontinuierlichen "Streckenspektrum" den Übergang von jener Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen zu einer dem *Fourier*integral entsprechenden Integraldarstellung zu vollziehen.

Im ersten Kapitel wird die Methode am typischen einfachsten Fall des *Fourier*integrales selbst auseinandergesetzt. Es handelt sich um die Theorie der durch Transformation aus $\frac{d^2u}{dx^2}+(\lambda-1)u=0$ entstehenden Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d}{ds}\left(s\,\frac{du}{ds}\right)+\frac{\lambda-1}{s}u=0\quad \text{für } 0\leqq s\leqq 1,$$

die durch Grenzübergang $\lim\varepsilon=0$ aus der bekannten (weil "regulären") Eigenwerttheorie für das Intervall $\varepsilon\leqq s\leqq 1$ unter den Randbedingungen $u(\varepsilon)=u(1)=0$ entsteht. In diesem Falle lassen sich nämlich – um über die Hauptgedanken der Methode, die diesem Grenzprozeß folgt, kurz zu referieren –

1. die Eigenwerte $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ und Eigenfunktionen $\varphi_p^{(\varepsilon)}(s)$ sofort explizit angeben, und sie gehören bekanntlich zugleich als solche zu einer "regulären" Integralgleichung:

$$(2)\qquad \varphi_p^{(\varepsilon)}(s)-\lambda_p^{(\varepsilon)}\int_0^1 K^{(\varepsilon)}(s,t)\varphi_p^{(\varepsilon)}(t)dt=0.$$

Für $\lim\varepsilon=0$ häufen sich die $\lambda_p^{(\varepsilon)}$ an allen Stellen $\lambda_\mu=1+\mu^2\pi$ (wo μ beliebig reell) und genügen mit den entsprechenden Grenzfunktionen $\varphi_\mu(s)$ der Integralgleichung

$$(3)\qquad \varphi_\mu(s)-\lambda_\mu\int_0^1 K(s,t)\varphi_\mu(t)dt=0,$$

wo nun $K(s,t)$ bei $s=t=0$ stark singulär ist und ein kontinuierliches Streckenspektrum hat: die λ_μ sind nämlich nicht Eigenwerte von K im eigentlichen Sinne, da $\int_0\varphi_\mu^2ds$ nicht mehr existiert.

2. Nach *Hilbert* (5. Mitt.; F. d. M. 37, 354, 1906, JFM 37.0351.04) lösen die *Fourier*koeffizienten $l_{pq}^{(\varepsilon)}$ von $\varphi_p^{(\varepsilon)}(s)$ das Problem der orthogonalen Transformation der aus den *Fourier*koeffizienten $k_{pq}^{(\varepsilon)}$ von $K^{(\varepsilon)}$ gebildeten "vollstetigen" quadratischen Form:

$$(4)\quad K^{(\varepsilon)}(x,x)=\sum_{(p,q)}k_{pq}^{(\varepsilon)}x_px_q=\sum_{(p)}\frac{1}{\lambda_p^{(\varepsilon)}}(\sum_{(q)}l_{pq}^{(\varepsilon)}x_q)^2.$$

Durch den Grenzübergang $\lim\varepsilon=0$ entsteht aus $K^{(\varepsilon)}$ eine zwar noch "beschränkte", aber nicht mehr "vollstetige" quadratische Form $K(x,x)$, und Verf. leitet aus (4) direkt durch Verfolgung der Häufung der

$\lambda_p^{(\varepsilon)}$ die Integraldarstellung her:

$$(5)\quad K(x,x)=\sum_{(p,q)} k_{pq}x_p x_q = 2\int_0^\infty \frac{(\sum_{(q)} l_p(\mu)x_p)^2}{\lambda_m u}d\mu,$$

wobei jedoch – im Gegensatz zu (4) – $\sum_{(q)} l_p(\mu)x_p$ nicht mehrfür *alle* Variablenwerte x_p von konvergenter Quadratsumme konvergiert; diese Formel ist genau die *Hilbert*sche Normaldarstellung dieser quadratischen Formen mit Streckenspektrum. Hierin ist eine besondere Methode zur Behandlung der allgemeinen Theorie beschränkter quadratischer Formen gegeben, die die von *Hilbert* zur Approximation verwendeten bestimmten endlichen Formen (die "Abschnitte") allgemeiner durch unendliche aber speziell vollstetige Formen ersetzt, und die wegen der hiernach bleibenden größeren Willkür in der Wahl der Approximationsformen zur Behandlung spezieller Probleme geeignet erscheint.

3. Die $k_{pq}, l_p(\mu)$ sind, wie aus ihrer Entstehung durch den Grenzprozeß gefolgert wird, *Fourier*koeffizienten von $K(s,t)$, bzw. $\varphi_\mu(s)$. In analoger Weise wie *Hilbert* (5. Mitt.) aus (4) die *Fourier*sche Reihenentwicklung nach den $\varphi_p^{(\varepsilon)}$ erschließt, wobei nur die wegen der eintretenden Singularitäten nötigen Konvergenzrücksichten einige Komplikationen bedingen, folgt dann aus (5) –bzw. der zugehörigen Darstellung der Einheitsform $\sum_{(p)} s_p^2$ – die *Fourier*sche Integraldarstellung in der Gestalt:

$$(6)\qquad f(s)=2\int_0^\infty d\mu\varphi_\mu(s)\int_0^1 dt\varphi_\mu(t)f(t), \text{wo } \varphi_\mu(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\ \sin(\mu\pi|\log t|),$$

natürlich unter gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen über $f(s)$. In gleicher Weise läßt sich aus den die quadratische Form $K(x)$ betreffenden Resultaten die vollständige Lösung der zu (3) gehörigen inhomogenen Integralgleichung entwickeln.

Diese Methode wird nun auf eine Reihe anderer typischer Differentialgleichungsprobleme angewandt und ergibt neuartige Integraldarstellungen, die hier nur noch kurz angegeben werden können:

Kapitel II: Die gleiche Randwertaufgabe für die allgemeine *Sturm-Liouville*sche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{ds}\left(s\frac{du}{ds}\right)+\frac{-g(s)+\lambda h(s)}{s}\ u=0 \quad \text{für } 0\leqq s\leqq 1,$$

wo $g(s)\geqq 1$, $h(s)\geqq a>0$, liefert außer einem Streckenspektrum von $g_0=g(0)$ bis ∞ noch höchstens endlichviele Punkteigenwerte $\lambda<g_0$; eine willkürliche Funktion wird durch ein zu (6) analoges Integral plus einer endlichen in *Fourier*scher Manier gebildeten Summe dargestellt.

Kapitel III: Die analoge Randwertaufgabe für

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda h(x)\cdot u=0 \text{ für } -l\leqq x\leqq\infty,$$

wo $h(x)$ eine gerade periodische Funktion mit der Periode $2l$, liefert, wie schon *Wirtinger* bemerkt hat (F. d. M. 27, 281, 1896, JFM 27.0281.01), ein aus unendlichvielen getrennten Strecken bestehendes Spektrum; entsprechend wird die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch eine Summe abzählbar unendlichvieler Integrale vom Typus (6) hergeleitet.

Kapitel IV: Die *Klein-Bôcher*schen Reihen nach *Lamé*schen Produkten in der Potentialtheorie führen auf das Eigenwertproblem einer partiellen Differentialgleichung, bzw. auf das zugehörige zweiparametrige Oszillationstheorem der allgemeinen *Lamé*schen Differentialgleichung (vgl. *Hilb*, F. d. M. 37, 783, 1906, JFM 37.0783.09). Fallen nun 2 singuläre Punkte dieser zusammen, und zieht sich das eine in Betracht kommende Intervall an sie heran, so tritt ein aus unendlichvielen übereinandergreifenden Teilen bestehendes Streckenspektrum auf, und demgemäß läßt sich – entsprechend einer Vermutung *Bôcher*s (F. d. M. 23, 1000, 1891, JFM 23.0996.01) – eine willkürliche Funktion zweier Variabeln als Summe unendlichvieler Integrale von der Art (6) darstellen, nur daß an Stelle der φ_μ Funktionen zweier Variabeln (*Lamé*sche Produkte) eingehen.

Reviewer: Hellinger, Dr. (Marburg)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 63.

[2] Vergl. auch A. Kneser, Math. Ann. Bd. 63, S. 477 u. f.

[3] D. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1906, 4. Mitteilung S. 172.

[4] Hamilton, On fluctuating fonctions. Trans. of Irish Ac. 19, 1842. · Zbl 023.0698cj

[5] M. Bôcher, Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894, S. 227. · Zbl 23.0996.01

[6] Mathematische Annalen 48, S. 387.

[7] Göttinger Nachrichten 1906, 4. Mitt. S. 157?227. 5. Mitt. S. 439?480.

[8] Wir werden diese beiden Arbeiten in der Folge unter H. 4 bez. H. 5 zitieren.

[9] Hilbert, 2. Mitt., Göttinger Nachrichten 1904, S. 217.

[10] A. Hurwitz, Mathematische Annalen, Bd. 57.

[11] Göttinger Nachrichten 1906: Theorie der unendlichen Matrizen.

[12] Diese Formen sind sehr nahe mit den von Herrn Hellinger in seiner Inauguraldissertation (Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen, Göttingen 1907) eingeführten Differentialformen verwandt.

[13] Vgl. z. B. E. Picard, Traité d'Analyse I, 1. Aufl., S. 233.

[14] H. 4, S. 198.

[15] H. 4, S. 193 und 195. · Zbl 0279.55009

[16] Vgl. H. Lebesgue, Séries trigonométriques, S. 38.

[17] H. 5, S. 448.

[18] H. 4, S. 183.

[19] Journal de Math.1. Vergl. auch M. Bôcher, N. Y. Bull. 1898; Encyklopädie II A7a; E. Picard, Traité d'Analyse III; ferner die Arbeit des Verfassers in den Jahresberichten 1907.

[20] Göttinger Nachrichten 1890.

[21] Bez. der Entwicklung nach den hierher gehörigen Eigenfunktionen vergl. auch die Arbeiten von A. Kneser in den Math. Ann. Bd. 58 und 60.

[22] Vgl. speziell Anm. 1 S. 16.

[23] Mathematische Annalen 48, S. 387.

[24] Vergl. F. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890.

[25] Die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig 1894. · Zbl 25.1525.03

[26] Mathematische Annalen 63.

[27] l. c. Mathematische Annalen 63. S. 52 u. 53.

[28] Herr Hilbert hat diesen Satz neuerdings ohne Kontinuitätsbetrachtungen bewiesen. Jahresberichte 1907 S. 76.

[29] Mathematische Annalen Bd. 18.

[30] Klein, Math. Annalen Bd. 18; ferner Bôcher p. 126 f. und die Arbeit des Verf. in den Jahresberichten 1907.

[31] l. c. Klein, Math. Annalen Bd. 18; S. 47.

[32] Vergl. z. B. A. Harnack: Die Grundlagen des logarithmischen Potentials, Seite 78.

[33] Vgl. S. 42.