Schmidt, Erhard

On the theory of linear and nonlinear integral equations. III: On the solution of nonlinear integral equations and their bifurcations. (Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen.) (German) JFM 39.0399.03

Math. Ann. 65, 370-399 (1908).

Gestützt auf die Entwicklungen des I. und besonders des II. Teiles dieser Folge von Publikationen [JFM 38.0377.02], unternimmt der Verf. den ersten großen Vorstoß in das weite Gebiet der nichtlinearen Integralgleichungen. Es ist eine volle, in sich abgeschlossene Theorie, orientiert nach dem Muster der Theorie der nichtlinearen Gleichungssysteme, von n Gleichung mit n Unbekannten, ähnlich wie Fredholm seine Theorie derjenigen der linearen Gleichungssysteme mit endlicher Variablenzahl nachgebildet hat. Und von diesem Gesichtspunkte aus ist es am zweckmäßigsten, im vorhinein zu skizzieren, welche Probleme der Verf. sich vorsetzt; hebt er doch diesmal noch eindringlicher als früher hervor, daß seine Entwicklungen ebensowohl für Funktionen von einem linear oder superfiziell ausgebreiteten, stetig veränderlichen Argument, als für Funktionen eines diskret springenden Index, mit anderen Worten für unendlich viele Veränderliche gilt, selbst für endlich viele Veränderliche, kurz daß seine Schlüsse unabhängig sind von der Anzahl der Veränderlichen.

Man denke das Gleichungssystem

$$f_\alpha(u_1,\dots,u_n;v_1,\dots,v_n)=0 \quad (\alpha=1,\dots,n)$$

vorgelegt, und f_α als Potenzentwicklung nach seinen Argumenten gegeben in der Form:

$$\begin{aligned} f_\alpha = a^\alpha &+ (a_1^\alpha u_1+\dots+a_n^\alpha u_n)+(b_1^\alpha v_1+\dots+b_n^\alpha v_n)\\ &+(a_{11}^\alpha u_1^2+\cdots)+b(_{11}^\alpha u_1v_1+\cdots)+(c_{11}^\alpha v_1^2+\cdots)\\ &+ \end{aligned}$$

konvergent in der Umgebung der Nullpunktes. Die Funktionaldeterminante, d. h. die Determinante $|a_i^{(k)}|$ der linearen Glieder, zeigt durch ihr Nichtverschwinden an, ob dieses implizite Gleichungssystem für solche Werte $v_1,\dots,v_n$, die dem Nullpunkt benachbart sind, nach $u_1,\dots,u_n$ eindeutig auflösbar ist durch konvergente Entwicklungen analoger Art; verschwindet dagegen die Funktionaldeterminante, so hat man (vom Standpunkte der reellen Variabeln, nicht der algebraischen Eliminationstheorie) in erster Reihe die *Puiseux*schen Sätze über den Verzweigungscharakter der Lösungen.

Das Analoge für Funktionalgleichungen zu leisten, ist in groben Worten das Ziel der vorliegenden Arbeit des Verf. Es erhellt als erstes daraus, daß dieselbe eine Theorie der linearen Integralgleichung zum Ausgangspunkt haben muß, und daß der *Fredholm*sche Nenner oder, besser gesagt, die von *Fredholm* statuierte Alternative zwischen Auflösbarkeit der homogenen und der der zugehörigen nichthomogenen Integralgleichung zweiter Art, angewandt auf die linearen Glieder einer "Integralpotenzreihe", die Rolle der Funktionaldeterminante zu übernehmen hat. Insofern waren die vorangehenden Arbeiten des Verf. eine Vorbereitung für die vorliegende.

Eingehend wird in den ersten Paragraphen der Begriff einer solchen "Integralpotenzreihe" und das elementare Operieren mit solchen entwickelt, ehe in § 4 das Umkehrungsproblem formuliert und angegriffen werden kann. Unter einem Integralpotenzgliede m-ten Grades einer Argumentfunktion wird ein Ausdruck der Form

$$u(s)^{\alpha_0}\int_a^b\cdots\int_a^b K(s,t_1,\dots,t_\varrho)u(t_1)^{\alpha_1}\dots u(t_\varrho)^{\alpha_\varrho}dt_1\dots dt_\varrho$$

verstanden; die allgemeine Integralpotenzreihe von einer Argumentfunktion $u(s)$ ist eine Summe solcher Glieder, die nach ihrer Dimension aufsteigend geordnet werden; Glieder gleicher Dimension werden dabei zu einem Aggregat, einer "Integralpotenzform m-ten Grades" zusammengefaßt gedacht. Nach demselben Muster werden Integralpotenzreihen zweier Argumentfunktionen $u(s),v(s)$ gebildet, Integralpotenzrelhen von Integralpotenzreihen usw.

$$0=u(s)+v(s)+\int_a^b\int_a^b K(s,t_1,t_2)u(t_1)^2u(t_2)^3v(t_2)^2dt_1dt_2$$

ist das Beispiel einer nichtlinearen Integralgleichung, durch das der Verf. seinen Begriff in der Einleitung andeutet. Die Form ersten Grades in $u(s)$ und nullten Grades in $v(s)$ wird nun die entscheidende für das Auflösungsproblem:

$$A(s)u(s)+\int_a^b B(s,t)u(t)dt,$$

wo $A(s)\neq 0$ im ganzen Intervall vorausgesetzt werden muß; sei $B/A=C(s,t)$, so ist also

$$(1)\qquad \varphi(s)-\int_a^b c(s,t)\varphi(t)dt=0$$

die lineare homogene Integralgleichung, deren Nichtlösbarkeit die Rolle des Verschwindens der Funktionaldeterminante übernimmt. Eine Majorisierung reduziert im übrigen die Konvergenz der invertierenden Entwicklung auf die Auflösung einer gemeinen Potenzreihe $\mathfrak{P}(p,q)$ der majorisierenden Größen p,q, nach p; mit anderen Worten: es wird die Gültigkeit des ganzen Theorems für eine implizite Gleichung mit einer Unbekannten vorausgesetzt.

Nach einem Digreß über den Fall, daß mehrere Funktionen $v_1,\dots,v_n$ an Stelle der einen $v(s)$ getreten sind (§ 6), wird der Fall der Lösbarkeit von (1) aufgenommen. Aus Teil II wird übernommen, daß man $C(s,t)$, falls die homogene Gleichung n linear unabhängige Lösungen hat, in die Form

$$C(s,t)=p_1(s)q_1(t)+\dots+p_n(s)q_n(t)+E(s,t)$$

setzen kann, wo die homogene Integralgleichung mit dem Kern $E(s,t)$ keine Lösung mehr besitzt, sodaß ein lösender Kern $\mathrm{E}(s,t)$ zu $E(s,t)$ vorhanden ist. Indem zuerst $n=1$ angenommen wird, kann durch Einführung von E gezeigt werden, daß die Auflösung der gegebenen nichtlinearen Integralgleichung von einer "Verzweigungsgleichung" abhängt, einer Gleichung für eine Größe x, die im allgemeinen zwei, im besonderen eine endliche Anzahl r von Wurzeln hat; dementsprechend hat man eine r-fache Verzweigung und Entwicklungen nach gebrochenen Potenzen, deren Exponent den Nenner r hat. Für $n>1$ treten n^2 Verzweigungsgleichungen an Stelle der einen bei $n=1$.

In seiner Einleitung kündigt der Verf. eine Fortsetzung an, die für nichtlineare elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung die Abhängigkeit der Lösungsflächen von den Randwerten und die dabei auftretenden Verzweigungen, ähnlich die von *Poincaré* entdeckte Bifurkation rotierender Gleichgewichtsfiguren geben soll; der Zusammenhang der Verzweigungsgleichung mit der *Jacobi*schen derivierten Differentialgleichung wird dabei hervortreten.

Reviewer: Toeplitz, Dr. (Göttingen)

MSC:

45-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to integral equations
45Gxx Nonlinear integral equations

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Diese Einleitung ist bis auf unwesentliche Änderungen eine Wiederholung der Inhaltsanzeige des vorliegenden Teiles, welche sich am Schluß der dem I. Teil voraufgehenden zusammenfassenden Einleitung Math. Ann. Bd. 63, S. 438 findet.

[2] Acta Mathematica Bd. 27.

[3] ?Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen? IVte und Vte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Kl., 1906, S. 157-227 und S. 433-480. · Zbl 37.0351.03

[4] Bis auf unwesentliche Änderungen stimmt dieser Paragraph mit {\S} 6 vom II. Teil, Math. Ann. Bd. 64 überein. Vergl. auch die diesbezüglichen Untersuchungen von Plemelj ?Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung?, Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. XV.

[5] Math. Ann. Bd. 63. Vergl. auch E. E. Levi ?Sulle Equazioni Integrali?, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 1907, vol.

XVI, serie 5a, 20 sem. fasc. 90.

[6] Dieses Problem dürfte nicht ohne Interesse sein, seit durch die Arbeiten von Hilbert (?Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen? IVte und Vte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys. Klasse, 1906, S. 157-227 und S. 439-480) die Bedeutung der Funktionen von unendlichvielen Variabeln in den Vordergrund getreten ist.