Wright, J. E.

Invariants of quadratic differential forms. (English) JFM 39.0180.01

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 9. Cambridge: University Press. 90 S. 8° (1908).

Die vorliegende Monographie, die die Nr. 9 der "Cambridge Tracts in mathematics and mathematical physics" bildet, ist der Invariantentheorie einer einzelnen quadratischen Differentialform gewidmet. Diese nicht nur für die reine Analysis, sondern auch für die Anwendungen auf Geometrie und Mechanik wichtige Disziplin wurde begründet von *Christoffel* (F. d. M. 2, 128, 1870, JFM 02.0128.03) und verdankt ihre moderne Entwicklung vor allem *Ricci* und *Levi-Civita* (F. d. M. 32, 296, 1901, JFM 32.0296.02); in dieser Gestalt erweist sie sich auch für die Anwendungen als die zweckmäßigste. Der Vollständigkeit halber sind indessen auch die gruppentheoretische Methode von *Lie* (F. d. M. 16, 91, 1884, JFM 16.0091.01) und die symbolische von *Maschke* (F. d. M. 31, 298, 1900, JFM 31.0298.01; 34, 141, 1903, JFM 34.0141.02; 35, 154, 1904, JFM 35.0154.01) hinreichend berücksichtigt worden. Die Hauptanregung für den Leser, insbesondere für den englischen, dürfte in den verschiedenartigen geometrischen und dynamischen Anwendungen liegen, die nahezu die Hälfte der Schrift einnehmen.

Den Ausgang bildet der bekannte Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes, zunächst in der Ebene: $\varphi(du,dv) = Edu^2 + 2F\,dudv + Gdv^2 = ds^2$. Rechts steht eine quadratische Form φ in den Variabeln du, dv, und die Koeffizienten E, F, G sind Funktionen von u, v. Sind E, F, G gegeben, so läßt sich die metrische Geometrie der Ebene entwickeln. Umgekehrt, wenn E, F, G als willkürliche Funktionen von u, v gegeben sind, so lassen sich die u, v als Funktionen von x, y dann und nur dann so wählen, daß ds^2 die obige Darstellung zuläßt, wenn ein gewisser partieller Differentialausdruck K (die Krümmung) für alle Werte von u, v verschwindet. Das entsprechende gilt, wenn eine beliebige Fläche zugrunde liegt. Gehen dann u, v durch irgend eine Transformation über in u', v', so daß $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$, so ist $K = K'$.

Irgend eine Funktion von u, v, E, F, G und ihren Ableitungen, die der angegebenen Bedingung genügt, heißt eine (*Gauß*sche) "Differentialinvariante" der Form φ.

Allgemeiner versteht man, wenn $\psi, \chi, \dots$ beliebige Funktionen von u, v bedeuten, unter "Differentialinvariante" oder "Differentialparameter" eine Funktion von $u, v, E, F, G, \psi, \chi, \dots$ und ihren Ableitungen, die beim Übergange zu den u', v' ihren Wert nicht ändert.

Dies läßt sich sofort auf den Fall von m Variabeln übertragen; man hat es dann geometrisch mit einem ds^2 in einer allgemeinen m-fachen Mannigfaltigkeit zu tun. Es entstehen dann die beiden Aufgaben, einmal alle Invarianten und ihre Relationen zu bestimmen, andererseits die geometrische Deutung zu finden. In der Dynamik stellt eine quadratische Form der $\frac{du_i}{dt}$, wenn die u_i $(i = 1, \dots, n)$ *Lagrange*sche Koordinaten sind, die kinetische Energie eines Systems dar.

Der Begriff einer Gruppe von Transformationen und von ihrer "Erweiterung" wird vorangestellt. Das Problem ist dann, wenn eine gewisse Anzahl quadratischer "fundamentaler" Differentialformen $\sum_{i,k=1}^n a_{ik}dx_idx_k$ und eine gewisse Anzahl von Funktionen $\psi(x_1, \dots, x_n)$ vorliegt, die einer Gruppe von Transformationen $x_i = x_i(y_1, \dots, y_n)$ unterworfen werden, die Bestimmung aller Invarianten der (durch Aufnahme der Ableitungen) erweiterten Gruppe. Hier haben sich historisch drei Hauptmethoden entwickelt. *Christoffel* (a. a. O.) gelangt direkt durch Vergleichung der ursprünglichen und der transformierten Formen zur Bildung von Invarianten, nachdem schon *Lamé* (1859) bei Zugrundelegung der speziellen Form $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ vorangegangen war. Aus Differentialparametern, die die Ableitungen der Fundamentalform φ und der Funktionen ψ bis zu einer gewissen Ordnung enthalten, lassen sich solche herleiten mit noch höheren Ableitungen. Dieser Prozeß wurde von *Ricci* und *Levi-Civita* (a. a. O.) systematisch ausgebildet und als "kovariante Ableitung" zur Grundlage gemacht. Der zu ihrer Ausbildung erforderliche Algorithmus heißt "absoluter Differentialkalül". Es wird eine vollständige Lösung des Problems gegeben. Um alle Differentialinvarianten einer Ordnung μ zu ermitteln, genügt die Bestimmung der algebraischen Invarianten eines Systems, das sich aus folgenden Formen zusammensetzt: 1. der fundamentalen Differentialform φ; 2. den kovarianten Ableitungen der willkürlichen Funktionen ψ bis zur Ordmung μ; 3. einer gewissen quadrilinaren Form G_4 und ihren kovarianten Ableitungen bis zur Ordnung $\mu - 2$.

Die zweite Hauptmethode ist die von *Lie* (a. a. O).) für "Differentialinvarianten" mittels der infinitesimalen Transformationen und ihrer Symbolik entwickelte. Die Invarianten erscheinen als Lösungen eines vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen. Diese Untersuchungen wurden von *Żorawski* (F. d. M. 24, 737, 1892, JFM 24.0737.03; 38, 168, 1907, JFM 38.0168.02), *Haskins* (F. d. M. 33, 122, 1902, JFM 33.0122.01; 35, 150, 1904, JFM 35.0150.01), *Forsyth* (F. d. M. 34, 147, 1903, JFM 34.0147.01?; 35, 610, 1904, JFM 35.0610.12; 38, 153, 1906, JFM 38.0153.01) und *Wright* (F. d. M. 36, 176, 178, 1905, JFM 36.0176.04 u. JFM 36.0178.01) fortgeführt und vervollständigt.

Eine dritte Methode verdankt man *Maschke* (a. a. O.), der eine Symbolik analog der für algebraische Invarianten üblichen begründete. Durch eine Art von Überschiebungsprozess können beliebig weit fortsetzbare Reihen von Invarianten konstruiert werden.

Um die *Christoffel*sche Methode zu erläutern, seien etwa im Falle zweier Variabeln $F = adx^2 + 2bdxdy + cdy^2$ und $F' = AdX^2 + 2BdXdY + CdY^2$ zwei quadratische Formen; x und y seien solche Funktionen von X, Y, daß F in F' übergeht. Hierfür ergeben sich sofort drei notwendige und hinreichende Bedingungen, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für x, y als Funktionen von X, Y, und deren Lösung liefert die gesuchte Transformation von F in F'. Die Koexistenz der drei Gleichungen verlangt die Gültigkeit einer Relation zwischen den a, b, c, A, B, C und ihren Ableitungen, und diese Relation ist eben die obige: $K = K'$. Entsprechendes findet für n Variabeln statt. Die beiden Formen schreiben sich jetzt

$$F = \sum a_{rs} dx_r dx_s, \quad F' = \sum a'_{rs} dy_r dy_s;$$

a sei die Determinante von F und Δ_{rs}, der Minor von a_{rs}. Setzt man:

$$[gh, k] = \tfrac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_h}\, a_{gk} + \frac{\partial}{\partial x_g}\, a_{hk} - \frac{\partial}{\partial x_k}\, a_{gh} \right],$$

$$\{il, r\} = \sum_k [il, k] \Delta_{rk}/a = \sum_k [il, k] a^{(rk)},$$

so heißen diese die "*Christoffel*schen Dreiindexsymbole der ersten, resp. zweiten Art."

Aus diesen setzt sich das schon von *Riemann* eingeführte "Vierindex-symbol" $(gkhi)$ nach der Regel zusammen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[gh, k] - \frac{\partial}{\partial x_h}[gi, k] + \sum_p (\{gi, p\}[hk, h] - \{gh, p\}[ik, p]).$$

Es gilt das Gesetz:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = [il, k] + [kl, i].$$

Unter den *Riemann*schen Symbolen sind nur $\frac{1}{12} n^2(n^2 - 1)$ unab-hängige. Die Identität $F = F'$ ist jetzt äquivalent mit $\frac{1}{2} n(n+1)$ Differentialgleichungen erster Ordnung in den x als Funktionen der y, und ihre Differentiation liefert weitere $\frac{1}{2} n^2(n+1)$ Gleichungen zweiter Ordnung. So kann man fortfahren; die Gleichungen, die die r-ten Ableitungen enthalten, bilden die $(r-1)$-te "Reihe". Sodann wird die quadrilineare kovariante Form G_4 aufgestellt. Sind $d^{(1)}y, \dots, d^{(4)}y$ vier Reihen von Differentialen der y und $d^{(1)}x, \dots, d^{(4)}x$ die entsprechenden der x, so ist $G_4 = \sum (ghki) d^{(1)} x_g d^{(2)} x_k d^{(3)} x_h d^{(4)} x_i$. Entsprechend gibt es höhere Formen G_5, usw. Das Äquivalenzkriterium für die Transformierbarkeit von F in F' besteht dann darin, daß die aus der Äquivalenz der beiden Folgen $F, G_4, G_5, \dots$ und F', $G'_4, {G_5}', \dots$ folgenden Gleichungen in den $x, y, \frac{\partial x}{\partial y}$ algebraisch verträglich sind. Hierbei braucht die Reihe der G nur bis zu einer gewissen G_q mit endlichem Index q fortgesetzt zu werden.

Damit ist das Äquivalenzproblem für zwei quadratische Differentialformen zurückgeführt auf das entsprechende für zwei Reihen algebraischer Formen, also auf die Übereinstimmung der algebraischen Invarianten beider Reihen. Diese letzteren, $J, J_1, \dots,$ bilden ein vollständiges System relativer Differentialinvarianten für F; der Faktor, den eine solche Invariante nach einer Transformation annimmt, ist die oben erwähnte Funktionaldeterminante der x nach den y. Diese Betrachtungen lassen sich auf Differentialparameter ausdehnen.

Daran schließen sich die Begriffsbildungen des absoluten Differentialkalküls. Ein System von Funktionen $X_{r_1 r_2 \dots r_m} (r_1, r_2, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n)$ heißt "kovariant", wenn die transformierten Größen Y das Gesetz befolgen:

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{s_1 s_2 \ldots s_m} X_{s_1 s_2 \ldots s_m} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial y_{r_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_m}}{\partial y_{r_m}},$$

und entsprechend "kontravariant" bei Vertauschung der x mit den y. Nach der *Christoffel*schen Methode läßt sich aus einem kovarianten System der Ordnung m ein solches von nächst höherer Ordnung ableiten: die Elemente des letzteren heißen die "kovarianten Ableitungen" des ursprünglichen Systems. Daraufhin läßt sich die oben angeführte Darstellung aller Differentialinvarianten einer Ordnung $\leqq \mu$ als algebraischer Invarianten eines einfachen Systems von Formen begründen. Allgemein, wenn irgend ein Problem vorliegt, das sich auf eine Fundamentalform F bezieht, so genügt es, die gewöhnliche Differentiation durch eine kovariante in bezug auf F zu ersetzen, um die Gleichungen des Problems in invarianter Gestalt zu erhalten.

Die *Lie*sche Methode der Differentialinvarianten ist bereits so oft (vgl. z. B. F. d. M. 16, 91, 1884, JFM 16.0091.01; 24, 737, 1892, JFM 24.0737.03) besprochen worden, daß wir sie hier übergehen können.

Bei der symbolischen Methode *Masches* (a. a. O.) wird die Fundamentalform $F = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ in der Gestalt $(df)^2$ geschrieben, wo f eine symbolische Funktion der x ist.

Die Ableitungen $f_1, \ldots, f_n$ von f sind Symbole, die das Produktgesetz $f_i f_k = a_{ik}$ befolgen.

Irgend ein die $a_i k$ enthaltender Ausdruck läßt sich in den f_i darstellen; ist er von höherer als der ersten Ordnung, so sind äquivalente Symbole $\varphi_i, \ldots$ einzuführen. So ist $a_{12}{}^2 = f_1 f_2 \varphi_1 \varphi_2, a_{11} a_{22} = f_1{}^2 \varphi_2{}^2$.

Wird die Fundamentalform jetzt mit A bezeichnet, mit der Determinante $|a_{ik}|$, und sind $F^1, F^2, \ldots, F^n$ irgend n invariante Ausdrücke von A (sodaß $F^{i'} = F^i$), so ist $(F) = |a_{ik}|^{-\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial F^i}{\partial x_k} \right|$ eine Invariante von A, wo der zweite Faktor die Funktionaldeterminante der F nach den X bedeutet. (F) heißt ein "invarianter Konstituent" von A. Das Dreiindexsymbol $[kl, i]$ wird jetzt einfach durch $f_i f_{kl}$ dargestellt, usw. Symbolische Identitäten dienen, wie in der algebraischen Formentheorie, zur Umformung invarianter Formen und Gleichungen. Unter den Anwendungen der Theorie sind zuerst geometrische Dentungen von Invarianten zu erwähnen. So ist für $ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$ die geodätische Krümmung der Kurven $v = konst.$ gegeben durch $-\frac{1}{AC} \frac{\partial A}{\partial v}$.

Die Flächen im gewöhnlichen Raume werden ausführlich behandelt. Hier ist die Fundamentalform $ds^2 = Edu^2 + 2F du dv + G dv^2$ mit zwei willkürlichen Funktionen $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ verbunden.

An die Stelle der Formenreihe $G_4, G_5, \ldots$ treten die einzige absolute Invariante K und ihre kovarianten Ableitungen. Man hat drei Invarianten $\Delta\varphi, \Delta(\varphi, \psi), \vartheta(\varphi, \psi)$, und durch diese und ihre Ableitungen lassen sich alle Differentialparameter ausdrücken. Insbesondere werden die geometrischen Eigenschaften erörtert, die durch das Verschwinden gewisser Invarianten ausgedrückt werden. Ferner wird das Problem der Abwickelbarkeit zweier Flächen allgemein behandelt. Unter den Anwendungen der Theorie der quadratischen Differentialformen von drei Variabeln ist wohl die wichtigste die Aufstellung der Bedingung dafür, daß eine Familie von Flächen in einem dreifachen Orthogonalsystem enthalten ist. Im Falle von n Variabeln sind die Bedingungen von Interesse, unter denen eine quadratische Form eine infinitesimale Transformation zuläßt.

Es folgen dynamische Anwendungen. Ein materielles System sei auf Koordinaten bezogen. Eine Transformation der Koordinaten entspricht einer Änderung der Lage des Systems; solange die letztere stets möglich ist, heißt das System holonomisch, dagegen nichtholonomisch, wenn infolge gewisser dynamischer Beschränkungen bei besonderen Problemen gewisse Koordinatentransformationen zu keinen realisierbaren Lagenänderungen führen.

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ die (allgemeinen) Koordinaten eines holonomischen Systems. Dient $\dot{x}$ als Abkürzung für $\frac{dx_r}{dt}$, so ist die kinetische Energie T des Systems gegeben durch: $2T = \sum a_{rs} \dot{x}_r \dot{x}_s$, wo die a_{rs} von den x abhängen. Wirken auf das System äußere Kräfte, die nur von der Lage, aber nicht von den Geschwindigkeiten abhängen, so ist die den Verrückungen dx_r entsprechende Arbeit $\sum X_r dx_r$, wo auch die X Funktionen der x sind. Dann lauten die *Lagrange*schen Bewegungsgleichungen bekanntlich:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_r} = X_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Es handelt sich um die Bestimmung der allgemeinsten Werte der x_r als Funktionen von t, die – bei gegebenen Funktionen a_{rs} und X_r – den Bewegungsgleichungen genügen.

Die x werden als Punktkoordinaten eines R_n gedeutet; jede partikulare Lösung der Gleichungen liefert eine Kurve im R_n, eine "Trajektorie" der Konfiguration: man hat die Gesamtheit dieser Trajektorien zu ermitteln. Der R_n wird zweckmäßig so gewählt, daß sein Linienelement bestimmt ist durch die Fundamentalform $ds^2 = \sum a_{rs} dx_r dx_s$. Dann sind die X_r ein kovariantes System erster Ordnung in bezug auf die Fundamentalform. Daraufhin lassen sich die Bewegungsgleichungen in invariante Gestalt umsetzen und erste Integrale des Systems angeben.

Haben zwei dynamische Systeme dieselben Trajektorien, und sind diese Geodätische für das eine System, so auch für das andere. Daraus entspringt das Problem, eine Mannigfaltigkeit so auf eine andere abzubilden, daß sich die Geodätischen entsprechen. Dies Problem wird vollständig gelöst. Es wäre zu wünschen, daß derartige handliche und wohlfeile Monographien, die dem Leser ein reiches Material in eleganter Darstellung bieten, auch in Deutschland veröffentlicht würden.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)