

Riesz, F.

Les systèmes d'équations linéaires à une infinie d'inconnues. (French) JFM 44.0401.01
Paris: Gauthier-Villars, VI + 182 S. 8°. (Collection Borel.) (1913).

Die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen, ursprünglich ein Nebenprodukt der Theorie der Integralgleichungen, wird hier zum erstenmal zum Gegenstand einer selbständigen Monographie gemacht. Die beiden ersten ihrer sechs Kapitel sind der "vorfredholmschen" Theorie, wie man es wohl kurz bezeichnen kann, insbesondere also der Theorie der unendlichen Determinanten gewidmet; die Namen *Fourier*, *Fürstenau*, *Kötteritzsch*, *Appell*, *Hill*, *Poincaré*, *von Koch* charakterisieren die Stellen, an denen der Verf. verweilt, um jeweils den wesentlichen Gedanken des betreffenden Autors knapp und scharf wiederzugeben.

In den Kapiteln 3 und 4 werden die Systeme von unendlichvielen linearen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten behandelt. Die allgemeinste Theorie, die das Minimum an Voraussetzungen heranzieht, die von *E. Schmidt* (Pal. Kend. 25, 53-77; F. d. M. 39, 401 (JFM 39.0401.*) ff., 1908), wird an die Spitze gestellt und ausführlich entwickelt. Der Satz von *Toeplitz* (F. d. M. 38, 156 (JFM 38.0156.*) ff., 1907) wird zuerst daraus abgeleitet; die direkten Beweise von *Toeplitz* und *Hilb* (F. d. M. 39, 407 (JFM 39.0407.*) ff., 1908) folgen dann. An dieser Stelle vermag der Ref. mit besonderem Nachdruck zu bezeugen, daß der Verf. die Absicht des Autors in der treffendsten Weise wiederzugeben versteht; trotzdem ist es dem Verf. entgangen, daß die invertierte *Jacobische* Transformation, deren sich *Toeplitz* bedient, mit dem Orthogonalisierungsverfahren von *Schmidt* formal übereinstimmt. Die *Hilberts*che Theorie der vollstetigen Gleichungssysteme folgt als Schlußglied dieser Entwicklungen; auf der Grundlage der *Toeplitz-Hilb*schen Betrachtung gibt er eine Darstellung dieser Theorie, für deren Grundidee er *A. C. Dixon* (Cambr. Trans. 19, 190-233; F. d. M. 33, 448 (JFM 33.0448.*) zitiert, und die am ehesten wohl derjenigen Entwicklung verwandt ist, die man erhält, wenn man die Theorie von *E. Schmidt* (Math. Ann. 64, 161-174; F. d. M. 38, 378 (JFM 38.0378.*), 1907) von Integralgleichungen auf unendlichviele Veränderliche analogisiert. – Die Betrachtungen des 3. Kapitel *s* fordern von den Unbekannten übrigens nicht notwendig konvergente Quadratsumme, sondern allgemeiner Konvergenz von $\sum |x_a|^p$, wo $1 < p < \infty$ (sogar die Grenzfälle $p = 1$, $p = \infty$ werden noch erörtert), eine Erweiterung, auf die der Verf. beträchtlichen Wert zu legen scheint, ohne ihre tiefere analytische Bedeutung näher zu motivieren.

Kapitel 5 ist der Eigenwerttheorie der reellen quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen gewidmet, vornehmlich der *Hilberts*chen Theorie der Formen mit Streckenspektrum. Der Verf. hat den Gedanken seiner Note (Gött. Nachr. 1910, 190-195; F. d. M. 41, 382 (JFM 41.0382.*)) zu einer außerordentlich eleganten Herleitung der grundlegenden Integraldarstellungsformel aus *Hilberts* vierter Mitteilung ausgestaltet. Dann bricht er mit einer Andeutung über die *Hellingers*chen Differentiallösungen und die Dissertation von *Hellinger* die weitere Entwicklung ab, die diese Theorie in *Hellingers* Habilitationsschrift durch die vollständige Zerspaltung der quadratischen Formen gefunden hat (F. d. M. 40, 393 (JFM 40.0393.*), 1909). Wegen einer unzutreffenden Anmerkung über die Zweckmäßigkeit des *Hellingers*chen Integralbegriffs sei übrigens auf F. d. M. 43, 421 (JFM 43.0421.*), 1912 verwiesen.

Kapitel 6 enthält drei Anwendungen der Theorie: 1. die Anwendung der unendlichen Determinanten auf lineare Differentialgleichungen nach *von Koch*; 2. der Zusammenhang mit den Integralgleichungen, dem die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen ihre Entstehung verdankt, und an dessen Vertiefung der Verf. als der eine Entdecker des *Fischer-Rießs*chen Satzes einen erheblichen Anteil hat; 3. die neueren Untersuchungen von *Caratheodory* über die *Fouriers*che Entwicklung positiver Funktionen in derjenigen algebraischen Entwicklungsart, in der sie *Toeplitz* aus seiner Theorie der *L*-Formen gewonnen hat.

Reviewer: [Toeplitz, Prof. \(Kiel\)](#)

Cited in **3** Reviews
Cited in **30** Documents