Hardy, G. H.
On the expression of a number as the sum of two squares. (English) JFM 45.1253.01
Quart. J. 46, 263-283 (1915).

Die Arbeit liefert Beiträge zur asymptotischen Untersuchung der Anzahl $r(n)$ der Zerlegung von n in eine Summe von Quadraten
$$n = \mu^2 + \nu^2 \quad (\mu, \nu \text{ganz}).$$
Es sei
$$R(x) = \sum_{n \leqq x} r(n) = \pi x + P(x)$$
(Anzahl der Gitterpunkte im Kreise vom Radius $\sqrt{x}$); dann ist bekanntlich
$$P(x) = O^{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}$$
(*Sierpinski*, Prace mat.-fiz. 17, 77; F. d. M. 37, 236 (JFM 37.0236.*), 1906). Verf. zeigt zunächst, daß in dieser Formel der Exponent $\frac{1}{3}$ nicht durch $\frac{1}{4}$ ersetzt werden kann. Insbesondere zeigt er, daß die Ungleichungen
$$P(x) > Kx^{\frac{1}{4}},\ P(x) < -Kx^{\frac{1}{4}},$$
wobei K eine feste positive Konstante $< \frac{2}{\pi}$ bezeichnet, für beliebige, große x erfüllt sind. Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der expliziten Darstellung von $R(x)$. Bezeichnet $J_1(s)$ die *Bessel*sche Funktion erster Ordnung, so ist
$$R(x) = \pi x - 1 + \sqrt{x} \sum_1^\infty \frac{r(q)}{\sqrt{q}}\, J_1[2\pi\sqrt{qx}],$$
wenn x nicht ganzzahlig ist; für ganze x ist die linke Seite durch
$$R(x) - \frac{r(x)}{2}$$
zu ersetzen. Daraus folgt die Beziehung
$$P(x) = S(x) + S_1(x),$$
in der
$$S(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi} \sum_1^\infty \frac{r(q)}{q^{\frac{3}{4}}} \sin\left[2\pi\sqrt{qx} - \frac{\pi}{4}\right]$$
ist und $S_1(x)$ eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe bezeichnet. Endlich werden analoge Ergebnisse für die Anzahl der Darstellungen einer positiven Zahl durch binäre definite quadratische Formen abgeleitet. Die Arbeit macht keinen Gebrauch von der Theorie der *Riemann*schen Zetafunktion.

Reviewer: Szegö, Dr. (Berlin)