

Tonelli, L.

Sur une méthode directe du calcul des variations. (French) JFM 45.0615.02
Palermo Rend. 39, 233-264 (1915).

Die in den vorstehend besprochenen Noten kurz mitgeteilten Ergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit ausführlich dargelegt. Sei $f(x, y, y')$ eine in dem Gebiete

$$(A) \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die dort den Bedingungen $f_{y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geq 0$ und $f > -N$ genügt. Sei ferner

$$f(x, y, y') > |y'|^{1+\alpha} m(y) \quad (\alpha > 0, \quad m(y) > 0)$$

in dem Gebiete

$$(A') \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad |y'| \geq M,$$

unter $m(y)$ eine stetige, positive Funktion verstanden, die so beschaffen ist, daß

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |y|^{1+\alpha} m(y) = +\infty$$

gilt. Sei $y(x)$ irgendeine in dem Intervalle $a \leq x \leq b$ erklärte *totalstetige* Funktion derart, daß das *Lebesguesche* Integral

$$I(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$$

existiert. Das *Integral* $I(y)$ ist eine nach unten *halbstetige Funktion* der Kurve $y(x)$. Mit anderen Worten, läßt sich jeder Zahl $\sigma > 0$ ein Wert $\varepsilon > 0$ zuordnen, so daß, wenn $y_0(x)$ eine den soeben genannten Bedingungen genügende Funktion bezeichnet, für alle ebensolche Funktionen $y(x)$ der Menge

$$|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$$

die Beziehung

$$I(y) > I(y_0) - \varepsilon$$

besteht.

Sei i die untere Grenze der Werte $I(y)$ für alle soeben betrachteten Kurven $y(x)$, die überdies durch zwei vorgeschriebene Punkte $(a, p_a), (b, p_b)$ hindurchgehen und es sei $y_1(x), y_2(x) \dots, y_n(x) \dots$ eine Minimalfolge. Man kann diese konstruieren, ohne von dem Auswahlprinzip Gebrauch zu machen. Die Folge $y_n(x)$ hat mindestens eine Grenzfunktion $y_\infty(x)$; diese ist *totalstetig*. Es gilt ferner $y_\infty(a) = p_a, y_\infty(b) = p_b$,

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx = i$$

Sei (\bar{x}, \bar{y}) ein beliebiger Punkte des Streifens $a \leq \bar{x} \leq b$. Ist $f_{y'^2}(\bar{x}, \bar{y}, y')$ in keinem Intervall durchweg gleich Null, so hat $y_\infty(x)$ in $a \leq x \leq b$ eine stetige Ableitung und es gilt:

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, y_\infty, y'_\infty).$$

Ist stets $f_{y'^2} > 0$, so folgt hieraus bekanntlich nach *Hilbert*, daß $y_\infty(x)$ stetige Ableitung zweiter Ordnung hat und der *Eulerschen* Differentialgleichung genügt.

Sei jetzt $f_{y'^2} > 0$. Es wird gezeigt, daß *jede* *totalstetige* Funktion, die dem Integral $I(y)$ den kleinsten Wert erteilt, eine bestimmte Ableitungen hat, die endlich sein kann oder nicht. Diese Ableitung ist, abgesehen homogene höchstens von einer abgeschlossenen Menge der Punkte vom Maßeiner Null, endlich und stetig.

Auf der Komplementärmenge ist die zweite Ableitung vorhanden und stetig, auch gilt dort die *Eulersche* Gleichung. Die Ausnahmemenge ist gewiß nicht vorhanden, wenn z. B. f von y unabhängig, oder wenn $|f_y|$ beschränkt ist usw. Analoge Sätze gelten, wenn die Kurven $y(x)$ sämtlich in einem beschränkten, abgeschlossen Gebiet liegen. Auch ist die Beschränkung auf feste Grenzen nicht notwendig. Es genügt vielmehr anzunehmen, daß $y(x)$ einer Klasse von Kurven angehört, die sämtlich wenigstens einen Punkte enthalten, dessen Ordinate unterhalb einer festen Schranke liegt, und überdies so beschaffen sind, daß jede Grenzkurve einer Folge von Kurven der Klasse selbst dieser Klasse angehört. Diese Bemerkung gestattet die Erledigung der Probleme des absoluten Minimums bei Vorhandensein der (isoperimetrischen) Nebenbedingung

$$K(y) = \int_a^b (M(x, y)dx + N(x, y)dy) = \text{Const.}$$

Auch steht nichts im Wege, die Integrale I und K zu vertauschen.

Reviewer: **Lichtenstein, Prof. (Leipzig)**

Cited in **1** Review
Cited in **35** Documents

Full Text: [DOI](#)

References:

- [1] Les principaux résultats de ce Mémoire ont été énoncés dans deux Notes insérées aux Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences [t. CLVIII (1914), pp. 1776–1778, 1983–1985]. 2) Nous suivrons dans ce Mémoire la terminologie de l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées {" [II 3, pp. 316–318; II 31, p. I; –voir aussi Ch. J. de la Vallée Poussin, Cours d'Analyse, 3e édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), pag. 129]; au lieu de maximum, minimum, extremum, nous dirons donc toujours maxime, minime, extrémé, et nous conjuguerons les verbes maximiser, minimiser, extrémiser.}
- [2] C. Arzelà, Sul principio di Dirichlet [Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova serie, vol. I (1896-97), pp. 71–84].
- [3] D. Hilbert, Ueber das Dirichlet'sche Prinzip [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VIII (1900), pp. 184–188]. Über das Dirichlet'sche Prinzip [Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Göttingen, 1901), pp. 1-27].
- [4] C'est-à-dire une suite telle, que celle des intégrales respectives tend vers la limite inférieure que l'on doit démontrer être un minime.
- [5] C'est-à-dire problème relatif à des champs – par exemple, circulaires – suffisamment petits.
- [6] Ce que nous avons dit s'applique aussi aux procédés employés par M. B. Levi, Fubini, Lebesgue pour résoudre le problème de Dirichlet et par M. Bolza et M. Carathéodory en d'autre cas. Dans le cas des intégrales curvilignes, si l'on admet la résolubilité et l'unicité de la solution du problème " im KUinen {" et que l'on se borne à des champs " extremal-convex {" , le problème de minimiser se réduit à celui d'une fonction continue ordinaire. C'est à M. Hadamard d'abord, et à M. Signorini, ensuite, que l'on doit cette remarque.}}
- [7] J. Hadamard, a) Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre, t. XXXIII, n. 4 (1908), pp. 1–128] et b) Sur une méthode de calcul des variations [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLIII (2e semestre 1906), pp. 1127-1129].
- [8] Cfr. le Mémoire cité 8) a), IVe Partie, § 4. 10) Notre critique s'adresse aussi aux méthodes de M. Hilbert.
- [9] H. Lebesgue, Intégral, Longueur, Aire [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo VII (1902), pp. 231–359]. · [Zbl 33.0307.02](#) · [doi:10.1007/BF02420592](#)
- [10] L. Tonelli, Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (20 semestre 1911), pp. 297–337]; Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni [Ibidem, t. XXXV (I semestre 1913), pp. 49-73]; etc. · [Zbl 42.0400.01](#) · [doi:10.1007/BF03014804](#)
- [11] L. Tonelli, Sulle funzioni di linee [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, I semestre 1914, pp. 28–33].
- [12] Nous nous bornons aux intégrales portant sur des courbes planes. Si la courbe en question a des coordonnées, en fonction de l'arc, toujours continues avec leurs dérivées des deux premiers ordres, nous pouvons facilement déduire notre proposition d'une autre de M. Lindeberg. W. Lindeberg, Über einige Fragen der Variationsrechnung [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 340-354] dont récemment M. E. E. Levi a donné une nouvelle démonstration. E. E. Levi, Sopra un teorema del Calcolo delle Variazioni del sig. Lindeberg [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVII (I semestre 1914), pp. 245-248]. Dans le cas général auquel l'on est forcément amené, la proposition
- [13] S. Bernstein, Sur les équations du calcul des variations [Annales Scientifiques de l'école Normale supérieure, IIIe série, t. XXIX (1912), pp. 431–485]. · [Zbl 43.0460.01](#) · [doi:10.24033/asens.651](#)
- [14] 1. c. 8).

- [15] Cfr. L. Tonelli, Sul valore di un certo ragionamento [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, t. XLIX (1913-1914), pp. 4–14]. · [Zbl 45.0614.01](#)
- [16] G. Vitali, Sulle funzioni integrali [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904-1905), pp. 1021–1034]. Nous rappelons cette définition. On dit qu'une fonction $f(x)$ est absolument continue dans (a, V) si, étant donné un nombre positif $\{\sigma\}$, arbitraire, on peut toujours déterminer un autre nombre $\{\mu\}$ tel que l'on ait $|\left| \sum \{f(\beta_i) - f(\alpha_i)\} \right| < \sigma$, où la somme est étendue à un ensemble quelconque d'intervalles $\{\alpha_i, \beta_i\}$ de (a, b) , sans parties communes, ayant une mesure totale plus petite que $\{\mu\}$. Nous rappelons aussi, qu'en vertu de la continuité absolue, $f(x)$ admet la dérivée $f'(x)$ finie presque partout [c'est-à-dire, pour tous les points de (a, b) sauf pour un ensemble de mesure nulle] et l'on a $\int_a^b (f(x_2) - f(x_1)) dx = \int_a^b f'(x) dx$. Réciproquement toute fonction, qui est une intégrale, est absolument continue.
- [17] Ces points formeraient un ensemble de mesure $\{\deg\}n$. [Voir Ch. J. de la Vallée Poussin, 1. c. 2), pag. 67].
- [18] F. RiESZ, über die Approximation einer Funktion durch Polynome [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVII (1908), pp. 196–211]. · [Zbl 39.0471.04](#)
- [19] F. Riesz, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen [Mathematische Annalen, Bd. LXIX (1910), pp. 449–497]. · [Zbl 41.0383.01](#) · [doi:10.1007/BF01457637](#)
- [20] 1. C. 22).
- [21] 1. C. 17).
- [22] L'existence d'une fonction limite $y(x)$ pour la suite (13) et la continuité absolue de cette y pouvaient se déduire aussi d'un théorème général démontré par M. Riesz [1. c. 22), § 7]. 10) que la I soit satisfaite;
- [23] Cfr. Hadamard, 1. c. 8) a), pag. 90.
- [24] 1. C. 5).
- [25] P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm (Paris, A. Hermann, 1897), pag. 560, et S. Bernstein, 1. c. 15), pag. 433.
- [26] En s'appuyant d'un côté sur une proposition de M. Darboux [G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal, IIIe Partie (Paris, Gauthier-Villars, 1894), pag. 83, et O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (Leipzig, G. B. Teubner, 1909), p. 438] sur les maximes absolues, et de l'autre sur un théorème de M. Cantor relatif aux ensembles d'intervalles distincts d'une droite, on peut dans les conditions que nous venons d'énoncer, établir facilement que, ayant fixé le point P a, par chaque point de la droite $a - b$, sauf tout au plus par ceux d'un ensemble dénombrable, il passe toujours une seule courbe $y = y(x)$ ($n \geq 2$) qui le joint avec P a et qui minimise J . Dans le cas que la variation seconde de J , débarrassée des termes en $\delta^2 y$ et $\delta^2 y'$, soit toujours positive, non nulle [Cfr. Hadamard, 1. c. 8) a), IVe Partie, § 3] l'ensemble exceptionnel disparaît et l'on a toujours l'unicité du minimant.
- [27] L. Tonelli, Sul problema degli isoperimetri [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, I^o semestre 1913, pp. 424–430]. Au sujet de ce problème isopérimétrique voir aussi: J. Hadamard, Sur quelques questions de calcul des variations [Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, IIIe Série, t. XXIV (1907), pp. 203–231], et J. Hadamard, La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XXI (1913), pp. 251–287].

This reference list is based on information provided by the publisher or from digital mathematics libraries. Its items are heuristically matched to zbMATH identifiers and may contain data conversion errors. It attempts to reflect the references listed in the original paper as accurately as possible without claiming the completeness or perfect precision of the matching.