Levi-Civita, T.
Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura ***riemanniana*****.** (Italian) JFM 46.1125.02
Palermo Rend. 42, 172-205 (1917).

Duch *A. Einstein*'s Theorie der Schwere ist die lang vernachlässigte Geometrie *Riemann*'s, die auf der Maßbestimmung durch ein beliebiges Bogenelement

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) dx_i dx_k$$

beruht, wieder in den Vordergrund gerückt worden. *Levi-Civita* erzielt in der vorliegenden Arbeit einen wesentlichen Fortschritt in der Geometrie *Riemann*'s dadurch, daß es ihm gelingt, den elementaren Begriff des Parallelismus auf den *Riemnann*schen Raum sinngemäß zu verallgemeinern. Dadurch ist ein neuer und leichter gangbarer Weg zur Krümmungstheorie gebahnt. Hat man eine Kurve $x_j(s)$ gegeben mittels ihrer Bogenlänge s, so daß

$$\sum a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 1$$

wird, so sagt man, daß die längs dieser Kurve gegebenen Vektoren $\xi^i(s)$, deren Koordinaten ξ^i sich wie die dx_i substituieren, parallel sind, wenn die invarianten Gleichungen gelten

$$(1) \quad \frac{d\xi^i}{ds} + \sum_{i,j} \left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_j}{ds} \xi^l = 0.$$

Diese Formeln, in denen die $\left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\}$ *Christoffels* Symbole bedeuten, gehen aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linien

$$(2) \quad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{i,j} \left\{ \begin{matrix} jl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_j}{ds} \frac{dx_l}{ds} = 0$$

durch eine Art Polarenbildung hervor und nach der neuen Auffassung sind die geodätischen Linien dadurch gekennzeichnet, daß sie "zu sich selbst parallel" verlaufen. Verschiebt man das Bündel der Vektoren ξ^j längs einer Kurve $x_i(s)$, so bleiben die Längen und Winkel der Vektoren ungeändert. Hat man zwei verschiedene Stellen x_i und $\overline{x_i}$ im Raume, so ist der Parallelismus der Bündel von Vektoren an diesen beiden Stellen im allgemeinen davon abhängig, auf welche Art man x_i und $\overline{x_i}$ durch eine Kurve $x_i(s)$ verbindet. Es handelt sich also um einen Parallelismus längs einer Kurve. Verlangt man, daß der Parallelismus vom Weg unabhängig sein soll, so kommt man durch die Integrabilitätsbedingungen von (1) ganz naturgemäß auf *Riemann*'s Krümmungstensor und findet, daß die Unabhängigkeit vom Wege für den Raum *Euklids* kennzeichnend ist. *Levi-Civita* ist zu seinem Parallelismus dadurch geführt worden, daß er sich seine *Riemann*sche Maßbestimmung zunächst an einer Fläche verwirklicht denkt, die in einen *Euklidi*schen Raum eingebettet ist. Hat man dann auf der Fläche eine Kurve und auf dieser Kurve zwei benachbarte Punkte und durch sie zwei Richtungen berührend der die Fläche, so heißen die "parallel", wenn der Parallelismus im *Euklid*ischen Sinne näherungsweise erfüllt ist. Invariant ohne Einbettung in einen *Euklid*ischen Raum kann man den neuen Parallelismus so erklären: man braucht nur zu fordern, daß die Richtungsänderung $\frac{d\xi^j}{ds}$ an einer Stelle des Raumes verschwindet, wo die Koordinaten x_i so gewählt sind, daß die a_{ik} stationäre Werte haben.

In Zukunft wird man bei einer systematischen Darstellung der Geometrie *Riemann*'s zweckmäßig den Parallelismus von *Levi-Civita* zum Ausgangspunkt nehmen. (VII.)

Reviewer: Blaschke, Prof. (Hamburg)