Carathéodory, Constantin
Vorlesungen über reelle Funktionen. (German) JFM 46.0376.12
Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, X u. 704 S. 8° (1918).

"Die Umwälzung, welche die Theorie der reellen Funktionen durch die Untersuchungen von *H. Lebesgue* erfahren hat, ist ein Prozeß, der heute in seinen Hauptzügen als abgeschlossen gelten kann. Ein Versuch, diese Theorie von Grund aus und systematisch aufzubauen, scheint mir daher notwendig geworden zu sein; dieses hat mich bewogen, die Vorlesung, die ich im Sommersemester 1914 an der Universität Göttingen gehalten habe, auszuarbeiten und, mit manchen Erweiterungn und Zusätzen versehen, der Öffentlichkeit vorzulegen."

Diese Worte kennzeichnen die Tendenz des groß angelegten Werkes: systematische Darstellung unabhängig vom historischen Werdegang. Der Verf. geht in dieser Richtung recht radikal vor. Für ihn ist das *Lebesgue*sche Integral schlechthin, das *Riemann*sche Integral wird erst später eingeführt und ordnet sich jener allgemeinen Definition unter. Mancher Begriff bekommt einen neuen Namen, während einige längst eingebürgerte Beziehungen eine teilweise abweichende Bedeutung erhalten. Quellenangaben fehlen ganz, die einzigen zwei ausdrücklich zitierten Werke finden sich auf Seite 1 genannt. Teilweise entschädigt wird man durch eine am Schluß angegebene Literaturübersicht, die 69 einzelne zusammenfassende Berichte, Lehrbücher und Abhandlungen enthält. Ob dieses Verfahren empfehlenswert ist, darüber dürften die Meinungen verschieden ausfallen, wenn auch zuzugeben ist, daß bei einer Darstellung, die das ganze Gebiet neu verarbeitet, die richtige Auswahl der jeweils ausdrücklich zu bezeichnenden Quellen nicht immer leicht sein wird. Für die Orientierung des Lesers sowie als Anleitung für das Studium der Originalabhandlungen dürfte die übliche Art des Zitierens ihre Vorteile haben.

Dies sind so kleine Schattenseiten eines konsequenten Strebens nach einem möglichst systematischen Aufbau der Theorie. Man wird dafür reichlich entschädigt durch die imposante Einheitlichkeit, Geschlossenheit und Allgemeinheit der Darstellung. Trotz der stets erstrebten Allgemeinheit, – so wird dem allgemeinen Funktionsbegriff sogleich eine beliebige Punktmenge des n-dimensionalen Raumes zugrunde gelegt, – ist den Entwicklungen überall leicht zu folgen, dank einer sehr erfreulichen Ausführlichkeit der Darstellung. In einem Werke wie dieses, das zugleich als Einführungsbuch wie auch als Nachschlagebuch dienen soll, ist ein gewisses Maß von Ausführlichkeit erwünscht; der Leser soll weder auf Schritt und Tritt Aufgaben vor sich erstehen sehen, die er lösen muß, bevor er weiter kann, noch soll er von Übermaß an Einzelheiten erdrückt werden. Von beiden Extremen hält sich die Darstellung von *Carathéodory* gleich weit entfernt; sie ist überall klar und durchsichtig, sehr exakt, sprachlich gewandt.

Das Fundament, auf dem die ganze Theorie der reellen Funktionen beruht, ist die Theorie der Punktmengen. Der eigentlichen Theorie der reellen Funktionen werden darum nach einleitenden axiomatischen Betrachtungen in dem ersten Kapitel (S. 19-71) Betrachtungen über Punktmengen, soweit diese für das spätere benötigt werden, vorausgeschickt und zwar gleich für Punktmenges eines n-dimensionalen Raumes. Es finden sich hier u. a. die Grundoperationen an Punktmengen, Begriff der Abzählbarkeit, das Auswahlaxiom von *Zermelo*, Überdeckungssätze von *Borel* und *Lindelöf*, Sätze über Häufungs- und Kondensationspunkte, überall dichte und nirgends dichte Punktmengen. Das zweite Kapitel (S. 71-120) beschäftigt sich mit dem Grenzbegriff. Nach der Einführung des Begriffes einer Funktion werden der obere und untere Limes in einer eigenartigen Weise, sogleich für Fumktionen, die auf einer beliebigen Punktmenge erklärt sind, definiert und im Anschluß daran konvergente Zahlenfolgen betrachtet. Schon an dieser Stelle wird mit der Teilmenge $M(f > \alpha)$, d. h. der Menge von Punkten, in denen der Wert der Funktion $> \alpha$ ist, operiert. Übrigens werden auch $\pm\infty$ als Werte der Funktion ausdrücklich zugelassen. Der Verf. bezeichnet auch Zahlenfolgen, die bestimmt unendlich werden, durchgehends als konvergent, hält sich indessen bei der darauffolgenden kurzen Betrachtung konvergenter Reihen an die herkömmliche Bezeichnungsweise. Es folgen Ausführungen über konvergente Punktmengen und den Limes superior und inferior einer Folge von Punktmengen. Hier wie auch später wird die Darstellung öfter durch Beispiele erläutert und lebendig gehalten. Das dritte Kapitel (S.120-191) ist "Funktionen" betitelt. Es beginnt mit allgemeinen Definitionen und Sätzen über beliebige Punkt- und zum Teil uach Mengelfunktionen, bringt dann Ausführungen über Limesfunktionen einer Punktfunktion, Halbstetigkeits- und Stetigkeitspunkte, halbstetige und stetige Funktionen, Schwankung, punktiert und unstetige Funktionen. Jetzt erst folgen spezielle Betrachtungen über Funktionen einer Variablen: allgemeine Begriffsbildungen und Bezeichnungen, monotone Funktionen, Erzeugung stetiger Funktionen, konvergente, insbesondere gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen, Funktionen von beschränkter Variation (in der Literatur meist als Funktionen beschränkter Schwankung bezeichnet), alles durch zahlreiche sorgfältig konstruirte Beispiele und figürliche Darstellungen erläutert. Das nächste, vierte Kapitel (S. 191-229) handelt von der Entfernung und dem Zusammenhang: Entfernung von Punkten und Punktmengen, Durchmesser einer Punktmenge, der Satz über die gleichmäßige Stetigkeit einer auf einer beschränkten und perfekten Punktmenge stetigen Funktion, stetige Abbildung einer Punktmenge, Kontinuen, Begrenzung von Punktmengen, Gebiete. Es folgt in dem ausführlichen fünften Kapitel (S. 229-307) die Theorie des Inhalts und der Meßbarkeit. Was der Verf. Inhalt nennt, ist das *Lebesgue*sche Maß einer Punktmenge; hier wird dieses gleich für Punktmengen des n-dimensionalen Raumes definiert. Den Gang der Entwicklungen Überschriften: äußerer Inhalt, Maßfunktionen, Meßbarkeit, die regulären Maßfunktionen, Anwendung der Theorie der Meßbarkeit auf den Inhalt von Punktmengen, quadrierbare Punktmengen, räumliche Zellennetze, Überdeckungssatz von *Vitali*. Maßfunktionen sind Mengenfunktionen, die gewisse vier Forderungen erfüllen. Der äußere Inhalt (das *Lebesgue*sche äußere Maß) ist eine Maßfunktion, – es wird durch Beispiele belegt, daß es auch andere Maßfunktionen gibt. Spezielle Maßfunktionen spielen in der Theorie der Länge und des Flächeninhalts krummer Linien bzw. Oberflächen, wie man sie dem Verf. verdankt, eine Rolle. In dem vorliegenden Buch wird auf diesen Gegenstand nicht eingegangen. – Übrigens wird hier $+\infty$ grundsätzlich als möglicher Wert einer Maßfunktion zugelassen. Das sechste Kapitel (S. 307-369) stellt in seinem ersten Teile zunächst eine Einschaltung dar. Es beginnt mit der Lehre über Vektoren und im Anschluß daran mit der Theorie der Determinanten, - die Einführung dieser und jener geschieht auf axiomatischem Wege. Es folgen lineare Punktgebilde und Punkttransformationen, voraus in dem nächsten Paragraphen der wichtige Satz über die Transformation des Inhalts von Punktmengen abgeleitet wird. Der nächste Paragraph bringt Sätze über Punktmengen von nicht meßbarem Inhalt, u. a. den Satz, daß jede Punktmenge, die keine Nullmenge ist, Teilmengen von nicht meßbarem Inhalte besitzt. Der vorletzte Paragraph handelt von stetigen meßbaren Abbildungen; es gibt eineindeutige und stetige Abbildungen der Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ und $0 \leqq y \leqq 1$ aufeinander, die alle Punkte des einen dieser Intervalle mit Ausnahme einer Nullmenge in eine Nullmenge des anderen Intervalls transformieren. In dem letzten Paragraphen wird die Unabhängigkeit der vier axiomatischen Forderungen, die Maßfunktionen definieren, sowie einiger weiteren verwandten Bedingungen erörtert. Es folgt jetzt das siebente, den meßbaren Funktionen gewidmete Kapitel (S. 369-413): Darstellung der Funktionen durch Folgen von Punktmengen, meßbare Funktionen, endlichwertige Funktionen (Funktionen, die nur endlich viele Werte annehmen), äquivalente Funktionen (Funktionen, die höchstens auf einer Nullmenge voneinander verschieden sind), die Klassen von *Baire* (unter Beschränkung auf Klassen einer endlichen Ordnungszahl), Anwendung des Klassenbegriffs auf meßbare Funktionen. Hier findet sich ein Hinweis (S. 403), daß es meßbare Funktionen gibt, die zu keiner endlichen Klasse gehören. Es wird ferner der Satz bewiesen: Es möge eine Funktion meßbar auf einer meßbaren Punktmenge A und dort endlich oder einer endlichen Funktion äquivalent sein. (Sie hat also höchstens auf einer Nullmenge die Werte $\pm\infty$.) Es gibt maßgleiche Kerne B von A, die perfekt oder Vereinigung von abzählbar vielen perfekten Punktmengen sind, und auf welchen die gegebene Funktion endlich und von der ersten Klasse ist. Das achte Kapitel. Das bestimmte Integral (S. 414-469): Zylindermengen, Ordinatenmengen, das bestimmte Integral von nichtnegativen Funktionen, Meßbarkeit und Summierbarkeit, Summierbare Funktionen beliebigen Vorzeichens, also Hauptsätze über die *Lebesgue*schen Integrale in großer Allgemeinheit vorgetragen. Es folgt ein Paragraph über Abschätzung und Approximation von Integralen (hier u. a. der erste Mittelwertsatz der Integralrechnung) und, als Übergang zu den klassischen Integraldefinitionen, Paragraphen über *Darboux*sche Summen und *Riemann*sche Integrale. Hier findet sich ein Hinweis auf eine nach *Riemann* integrierbare Funktion, die zu keiner endlichen *Baire*schen Klasse gehört (S. 467). Der Schlußsatz des vorliegenden Kapitels besagt, daß jedes Integral einer summierbaren Funktion als Grenze von *Riemann*schen Integralen berechnet werden kann. Das neunte Kapitel (S. 469- 510): Das unbestimmte Integral und die additiven totalstetigen Mengenfunktionen. Sei $f(P)$ eine Funktion des Punktes P des n-dimensionalen Raumes, die über jede meßbare Punktmenge e des n-dimensionalen Raumes von endlichem Inhalte summierbar ist. Der Wert des Integrals von $f(P)$ über e ist eine Mengenfunktion $F(e)$. Sie heißt das unbestimmte Integral von $f(P)$

$$F(e) = \int_e f(P)dw.$$

Jedes unbestimmte Integral erfüllt die Bedingung

$$F(e) \leqq \varepsilon, \text{ sofern } me \leqq \delta,$$

die totalstetige Mengenfunktionen charakterisiert. Es folgen Betrachtungen über totalstetige additive Mengenfunktionen, mittlere Derivierte einer beliebigen endlichen Mengenfunktion, verallgemeinerte Derivierte. Jede Derivierte einer additiven totalstetigen Mengenfunktion $F(e)$ ist eine meßbare Funktion, die über jede meßbare Punktmenge e von endlichem Inhalte summierbar ist und deren unbestimmtes Integral die Mengenfunktion $F(e)$ ist. Die Limesfunktionen der Derivierten. Die additiven totalstetigen Intervallfunktionen. Kapitel X (S. 510-620). Spezialtheorie der Funktionen einer Veränderlichen. Sie beginnt mit der Einführung des Begriffes einer λ-Variation. Sei $f(x)$ etwa eine auf einem offenen Intervalle A erklärte Funktion, $\alpha_k < x\beta_k$ $(k = 1, \dots, p)$ irgendeine endliche Folge von Teilintervallen von A ohne gemeinsame Punkte, so daß

$$\sum_{k=1}^{p} (\beta_k - \alpha_k) \leqq \lambda$$

gilt. Die obere Grenze der Zahlen

$$\sum_{k=1}^{p} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)|$$

ist die λ-Variation $\tau(\lambda)$ von $f(x)$ auf A. Ist die Nullvariation von $f(x)$ in A erklärt, als $\lim_{\lambda=0} \tau(\lambda)$ gleich Null, so heißt $f(x)$ in A totalstetig. Die Derivierten einer Funktion. Die Regeln der Differentialrechnung. Die Derivierten stetiger Funktionen als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen. Die Derivierten einer endlichen und stetigen Funktion sind meßbar und von der zweiten Klasse. Einfache Integrale und totalstetige Funktionen. Substitutionstheorie der einfachen Integrale. Monotone nicht notwendig stetige Funktionen. Jede endliche, monotone Funktion $f(x)$ ist in einem maßgleichen Kern ihres Definitionsgebietes differentiierbar. Die Derivierten von $f(x)$ sind alle meßbar und einander äquivalent. Sie sind summierbar über jedes Intervall, in dem $f(x)$ definiert ist. Die Differenz zwischen $f(x)$ und einem ihrer un bestimmten Integrale ist eine Funktion von konstanter λ-Variation (die λ-Variation ist von λ unabhängig). Meßbare Abbildungen. Funktionen von beschränkter Variation. Die *Weierstraß*sche nirgends differentiierbare Funktion. Das Umkehrproblem der Differentialrechnung. Berechnung von einfachen Integralen. Uneigentliche Integrale. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung. Erweiterung des Definitionsbereichs stetiger Funktionen (nach einer brieflichen Mitteilung von *H. Bohr*). Kapitel XI. (S. 621-688) über Funktionen von mehreren Veränderlichen. Beginnt mit dem bekannten Satze von *Fubini*, der die Basis der Theorie der vielfachen Integrale bildet, in einer sehr allgemeinen Fassung. Es folgen Betrachtungen über die wiederholten und die mehrfachen Integrale, auch wenn die Funktionen nach *Riemann* integrierbar sind. Partielle Ableitungen. Differentiierbarkeit. Totalstetige Funktionen von zwei Veränderlichen. Differentiation unter dem Integralzeichen. Differentialgleichungen. Sind $f_k(x; y_1, \dots, y_n)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ als Funktionen von x meßbar und als Funktionen von $(y_1, \dots, y_n)$ stetig, ist ferner für $a < x < b$

$$|f_k(x; y_1, \dots, y_k)| < M(x) \ (k = 1, 2, \dots, n),$$

wo $M(x)$ in $a < x < b$ summierbar ist, so gibt es für jedes $x_0(a < x_0 < b)$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ein System totalstetiger Funktionen $y_1(x), \dots, y_n(x)$, so daß für $a < x < b$ die Gleichungen

$$y_k(x) = a_k + \int_{x_0}^{x} f_k[x; y_1(x), \dots, y_n(x)]dx \ (k = 1, \dots, n)$$

gelten. Differentiation der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen nach einem Parameter. – Folgt ein Verzeichnis der Beispiele und das Register.

Wir haben im vorstehenden versucht, eine Vorstellung von dem Charakter des inhaltsreichen Buches zu geben. Es ist ein Werk aus einem Guß, das vieles Neue und Eigenartige enthält. Viele vom Verfasser eingeführte Begriffe und Ergebnisse werden zweifellos zum dauernden Besitz der Wissenschaft werden. Es ist ein wertvolles Geschenk, das uns *Carathéodory* mit diesem tief durchdachten Werk beschert hat.

Reviewer: Lichtenstein, Prof. (Münster)