Study, E.

Zur Theorie der linearen Gleichungen. (German) JFM 46.0144.06

Acta Math. 42, 1-61 (1918).

In der gewöhnlichen Theorie von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten kommt es vor, daß in den Zählern und in dem Nenner aller n Determinantenquotienten, die die Lösung als Funktion der Koeffizienten darstellen, wenn diese selbst Funktionen von anderweitigen Variabeln sind, gemeinsame Faktoren auftreten, durch deren Kürzung eine Vereinfachung erzielt wird. Dies Vorkommnis bildet die Regel bei den Gleichungssystemen, die in der Lehre von den höheren komplexen Zahlen auftreten. Sind in den Formeln $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_k = x'_i$ $(i = 1, \dots, m)$ alle Buchstaben höhere komplexe Zahlen mit je n Koordinaten, so ist dies Gleichungssystem nur ein kurzer Ausdruck für ein Gleichungssystem von nm gewÖhnlichen Gleichungen in ebensoviel Unbekannten, dessen Determinante eine homogene Funktion der nm^2 Koordinaten der a_{ik} ist, die nicht identisch verschwindet, wenn es sich um ein System mit Haupteinheit handelt. Setzt man nun die Lösungen in reduzierte Form, so entsteht im Nenner eine skalare Funktionen der a_{ik}

$$\nabla(a_{ik}) = \left\{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{matrix}\right\},$$

die als Nablafunktion bezeichnet wird, und deren genauerer Untersuchung die interessante Arbeit gewidmet ist. Es zeigt sich, das ∇ eine Reihe von Determinanteneigenschaften besitzt: Sie ist homogen vom Grade ϱ in bezug auf die Koordinaten der Elemente irgend einer Zeile oder Spalte der Matrix (a_{ik}), wenn ϱ den Rang des Zahlsystems im Sinne von *Molien* bedeutet, sie bleibt ungeändert wenn man zu den Gleichungsn $\xi' = \sum \xi_k a_{ik}$ übergeht, ferner wenn man zu irgend einer Zeile (Spalte) der Matrix (a_{ik}) ein vorderes (hinteres) Multiplum einer andern Zeile (Spalte) addiert, sie multipliziert sich bei Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten mit einem Faktor ± 1 u. a. m. Das genaue Bildungsgesetz der Funktion, das hier nicht wiedergegeben werden kann, wird vor allem im Falle der *Hamilton*schen Quaternionen bestimmt; es führt u. a. zu Relationen der Form

$$\nabla \sum_k a_{ik}A_{ik} = \sum_i A_{ik}a_{ik};\ 0 = \sum_k a_{jk}A_{ik} = \sum_k A_{ik}a_{jk} \quad (i \neq j)$$

für gewisse Quaternionen A_{ik}, die den Unterdeterminanten der gewöhnlichen Theorie analog sind und die vollständige Auflösungstheorie des gegebenen Gleichungssystems enthalten. Das Quadrat von ∇ wird gleich der Determinante der gegebenen $4m$ Gleichungen, ∇ selbst ist eine irreduzible Funktion der $4m^2$ Koordinaten von a_{ik}. Weitere Sätze betreffen das Multiplikationstheorem für die ∇-Funktion, das dem Multiplikationsgesetz der Determinaten entspricht, ferner die Eigenschaft $\nabla \geqq 0$ bei reellen Koordinaten der Quaternionen und ein Resultat von *I. Schur*, daß im letzteren Falle ∇ nicht als Summe von Quadraten reeller homogener Formen der Koordinaten dargestellt werden kann. – In einem Anhang wird die Theorie der Gleichungen mit schiefsymmetrischer Determinante und der *Pfaff*schen Aggregate mit invariantentheoretischen Hilfsmitteln behandelt. (V 7.)

Reviewer: Schmeidler, Prof. (Kiel)

Full Text: DOI

References:

[1] Eine eingehendere Untersuchung der Gleichungssysteme (1) wird man in einer in Vorbereitung begriffenen Schrift finden, in der auch eine geometrische Anwendung besprochen wird.

[2] So verhält es sich im Bespiel \(\begin{array}{*{20}c} {2\alpha _{11} = 2\alpha _{22} = e_2 + ie_3 ,} {2\alpha _{21} = 2\alpha _{12} = e_2 + ie_2 .} \end{array} \)

[3] Eine solche Zusammenfassung ist gelegentlich auch sonst schon vorgenommen worden.

[4] Hierzu kommt noch, dass die entwickelte Theorie fast unverändert unter Umständen angewendet werden kann, in denen eine Äquivalenz der zu betrachtenden Grössenquadrupel mit zweireihigen Matrices überhaupt nicht vorhanden ist. Vgl. {\S} 6.

[5] Vgl. Math. Enc. Bd I, 1, S. 182. Französische Ausgabe I, 1, S. 435.

[6] Siehe weiterhin S. 36.

[7] Die Gleichungen (12) lassen noch erkennen, dass die Produkte \(\Phi _{ik}^s = \Theta _{ks}^s ,\Psi _{ik}^s = H_{si}^k \) für die Matrix (A ik) eine ganz ähnliche Bedeutung haben, wie für die Matrix (a ik) die Produkte \(\vartheta _{ks}^i = \alpha _{ki} \tilde \alpha _{si} ,\eta _{si}^k = \tilde \alpha _{ks} \alpha _{ki} ,\) von denen wir die ersten zur Beschreibung des Bildungsgesetzes der Funktion benutzt hatten. – Natürlich würde sich das Bildungsgesetz der Funktion auch mit Hülfe der Produkte{\(\eta\)} si k haben beschreiben lassen.–

[8] Vgl. hierzuHilbert, Math. Ann. Bd 32 (1888), S. 342, Acta Mathematica, Bd 17 (1893) S. 169. Archiv f. Math. (3), Bd 1 (1901), S. 224, und Grundlagen der Geometrie (3. Aufl., 1909) Kap. VII, {\S} 38. · Zbl 20.0198.02 · doi:10.1007/BF01443605

[9] Th. Molien, Math. Ann. Bd 41 (1893), S. 113.

[10] Vgl. etwaMolien, a. a. O., S. 110.

[11] Übrigens gibt es auch noch anders geartete Fälle, in denen eine weitere Reduktion möglich ist. Vgl. {\S} 7.

[12] Jacobi's Ges. Werke, Bd IV, S. 25 u. ff. Neuere Darstellungen beiKowalewski, Determinanten, Leipzig 1909, Kap. 9, undE. v. Weber, Pfaff'sches Problem, Leipzig 1900, Kap. I. Vgl. auchF. Engel inGrassmann's Werken I, 2, S. 474 u. ff., Leipzig 1896.

[13] Vonn=8 an kommen noch weitere Entwickelungen nach Art derLaplace'schen Determinantenformeln hinzu, z. B. \(P = \frac{I}{3}\{ (I234)(5678) = | \cdots \} .\)